TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

Giáo trình

QUY HOẠCH TOÁN HỌC

Biên soạn : Ngô Hữu Tâm

(Lưu hành nội bộ - 2016)

Lời mở đầu

Giáo trình "*Quy hoạch Toán học*" này được biên soạn nhằm phục vụ cho nhu cầu về tài liệu học tập của sinh viên Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh. *Nội dung giáo trình này gồm 6 chương:*

Chương 0 : *Ôn tập và bổ túc một số kiến thức về đại số tuyến tính và giải tích lồi.*
Chương 1 : *Bài toán quy hoạch tuyến tính.*
Chương 2 : *Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu.*
Chương 3: *Bài toán vận tải.*
Chương 4: *Bài toán sản xuất đồng bộ.*
Chương 5: *Phương pháp sơ đồ mạng PERT-CPM.*

Nội dung môn học như trên là khá phong phú. Tuy nhiên, thời lượng dành cho môn học này chỉ có 45 tiết là hơi ít. Do đó, để tiếp thu tốt môn học, các bạn sinh viên cần đọc kỹ bài học trong giáo trình trước khi đến lớp. Các bạn chỉ cần làm bài tập vừa đủ để hiểu rõ nội dung, ý nghĩa các bài toán và nắm vững các thuật toán, mà không nên mất thời gian nhiều với việc tính toán.

Trước mỗi chương tác giả nêu ra những nội dung, những kiến thức cơ bản mà sinh viên cần phải đạt được. Dựa vào đó mà các bạn sinh viên biết được mình sẽ phải học những gì, cần phải hiểu rõ những khái niệm nào, những nội dung nào cần phải nắm vững và những bài toán dạng nào phải làm được. **Trong mỗi chương, tác giả đưa vào khá nhiều ví dụ phù hợp để minh họa làm sáng tỏ các khái niệm vừa được trình bày đồng thời chỉ ra được rất nhiều ứng dụng vào thực tế.** Sau mỗi chương có phần bài tập được chọn lọc phù hợp để sinh viên tự luyện tập nhằm đạt được sự hiểu biết sâu rộng hơn các khái niệm đã đọc qua và thấy được các ứng dụng rộng rãi của các kiến thức này vào thực tế. Để tiện cho việc ứng dụng vào thực tiễn, sinh viên cần tìm hiểu thêm việc sử dụng các phần mềm tính toán cho môn học này như : Excel, Matlab , Maple , ...-*Phần này sẽ thực hiện qua bài thu hoạch nhóm cùng với nội dung chương 5 khi sinh viên học môn này với tác giả giáo trình.*

Tuy có rất nhiều cố gắng trong công tác biên soạn , nhưng chắc chắn giáo trình này vẫn còn thiếu sót. Chúng tôi xin trân trọng tiếp thu ý kiến đóng góp của các bạn sinh viên và các đồng nghiệp để giáo trình này ngày càng hoàn chỉnh hơn.

Thư góp ý xin gửi về : Ngô Hữu Tâm
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh
Khoa Khoa học Cơ bản
Bộ môn Toán
Email: tamnh@hcmute.edu.vn
huutamngo@yahoo.com.vn

Cuộc sống luôn nảy sinh những vấn đề (bài toán) cần giải quyết. Mỗi khi giải quyết một vấn đề, sau khi đã tìm ra một phương án, chúng ta thường hài lòng ngay với phương án vừa tìm được ,mà ít nghĩ rằng vấn đề còn có thể giải quyết bằng phương án khác tốt hơn. Như vậy, khi tìm phương án để giải quyết một vấn đề, chúng ta phải tìm phương án tốt nhất (nếu có thể). ***Phương án tốt nhất để giải quyết một vấn đề với một số điều kiện, ràng buộc cho trước gọi là phương án tối ưu.***

Mỗi vấn đề cần giải quyết luôn nằm trong một hệ thống nhất định. Bản thân hệ thống này lại nằm trong hệ thống khác lớn hơn gồm nhiều hệ thống nhỏ. Các hệ thống này chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau. Hơn nữa, mỗi vấn đề lại chứa đựng bên trong nó những hệ thống nhỏ hơn và chúng cũng chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau. Do đó, để bảo đảm vấn đề mà chúng ta quan tâm được giải quyết một cách chính xác, chúng ta cần phải chú ý đến tất cả những mối liên hệ và ảnh hưởng nêu trên.

Chương 0

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ GIẢI TÍCH LỒI

1. Ma trận

Một ma trận A cấp m×n (cỡ m×n) trên **R** là một bảng chữ nhật gồm m×n phần tử trong **R** được viết thành *m hàng* và *n cột* như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbf{R}$ là phần tử ở vị trí hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A. Đôi khi ma trận A được ký hiệu vắn tắt là : $A = [a_{ij}]_{mxn} = (a_{ij})_{mxn} = A_{mxn}$.

Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng: $Y = (y_1 \quad y_2 \quad ...... \quad y_n)$.

Ma trận có số hàng bằng số cột gọi là ma trận vuông. Ma trận vuông có n hàng gọi là ma trận vuông cấp n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{nxn}$.

Ma trận tam giác trên:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} = 0 \text{ nếu } i > j$$

∗ Ma trận tam giác dưới:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} = 0 \text{ nếu } j > i$$

Ma trận đơn vị cấp n ký hiệu là $\mathbf{I}_n$ hay **I:** $\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

❖ ***Các phép toán về ma trận***

i) Ma trận bằng nhau: Cho các ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$$\boxed{A = B \overset{\text{ĐN}}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij} \; ; \forall\, i = \overline{1, m}\, ; j = \overline{1, n}}$$

ii) phép cộng, trừ các ma trận cùng cấp: Cho $A = [a_{ij}]_{mxn,}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$$A + B \overset{\text{ĐN}}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} \quad ; \quad A - B \overset{\text{ĐN}}{=} [a_{ij} - b_{ij}]_{mxn}$$

iii) Phép nhân một số với một ma trận: Cho $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $\alpha \in R$

$$\alpha A \overset{\text{ĐN}}{=} [\alpha a_{ij}]_{mxn}$$

iv)Phép nhân hai ma trận có cấp thích hợp:(số cột ma trận trước phải bằng số hàng ma trận sau)

Cho các ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{nxp}$

$$AB \overset{\text{ĐN}}{=} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right]_{mxp}$$

v) Phép chuyển vị: Ma trận chuyển vị của $A = [a_{ij}]_{mxn}$, ký hiệu A^T, $A^T \overset{\text{ĐN}}{=} [a^T_{ji}]_{nxm}$ với $a^T_{ji} = a_{ij}$, tức là A^T có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột.

❖ ***Phép biến đổi sơ cấp hàng của ma trận***

Có 3 loại phép biến đổi sơ cấp hàng:

Loại 1 Hoán vị hai hàng : $h_i \leftrightarrow h_j$

Loại 2 Nhân một số khác 0 vào một hàng : $\alpha h_i \to h_i$, $\alpha \neq 0$

Loại 3 Thay một hàng bởi hàng đó cộng với α lần hàng khác:

$h_i + \alpha h_j \to h_i$, $i \neq j$.

Kết hợp loại 2 và loại 3 ta được : $\alpha h_i + \beta h_j \to h_i$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$.

2. *Hệ phương trình tuyến tính*

Một hệ phương trình tuyến tính trên R là hệ thống gồm m phương trình bậc nhất (n ẩn số) có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Leftrightarrow \ AX = B$$

Trong đó $a_{ij} \in R$ (gọi là các hệ số) và $b_i \in R$ (gọi là các hệ số tự do) là các số cho trước, các x_j là các ẩn cần tìm (trong R).

- Ma trận A gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình (I).
- Ma trận B gọi là ma trận cột các hệ số tự do.
- Ma trận X gọi là ma trận cột các ẩn số.

- Ma trận $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1n} : b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots\ldots a_{2n} : b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots\ldots a_{mn} : b_m \end{pmatrix} = (A \mid B)$ gọi là ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình tuyến tính (I) hoặc gọi tắt là ma trận bổ sung.
- Nghiệm của hệ (I) là bộ số (c_1 , c_2, ..., c_n) sao cho khi thay x_i bởi c_i thì tất cả các phương trình của hệ đều thỏa.
- Hai hệ phương trình tuyến tính gọi là ***tương đương*** nếu chúng ***có cùng tập hợp nghiệm***.
- Một hệ phương trình tuyến tính gọi là ***tương thích*** nếu nó ***có nghiệm***.

❖ **<u>Định lý Cronecker - Capelli</u>** (n là số ẩn số của hệ phương trình)

i) $r(A) = r(\overline{A}) = n \Leftrightarrow$ HPT (I) có nghiệm duy nhất.

ii) $r(A) = r(\overline{A}) < n \Leftrightarrow$ HPT (I) có vô số nghiệm.(khi đó có n-r(A) ẩn số tự do)

iii) $r(A) < r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) vô nghiệm.

iv) $r(A) = r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) có nghiệm (hệ tương thích).

3. Không gian vectơ $\mathbb{R}^m$

Không gian vectơ $\mathbb{R}^m$ là tập $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) / x_i \in R, i = \overline{1,m}\}$ với phép cộng vectơ và phép nhân một số với một vectơ như sau:

$\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

- Phép cộng vectơ: $x + y \overset{ĐN}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$.
- Phép nhân một số với một vectơ: $\alpha x \overset{ĐN}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m)$.

Mỗi vectơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ còn gọi là *vectơ m chiều*. Vectơ không hay vectơ zero là $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

♦ *Tổ hợp tuyến tính*: Vectơ x gọi là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, ..., u_n nếu và chỉ nếu tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ sao cho

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n u_n$$

♦ *Phụ thuộc tuyến tính:* Các vectơ u_1, u_2, ..., u_n gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n u_n = 0$$

♦ *Độc lập tuyến tính:* Các vectơ u_1, u_2, ..., u_n gọi là độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

- *Cơ sở:* Các vectơ $u_1, u_2, ..., u_m$ gọi là cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^m$ nếu và chỉ nếu chúng độc lập tuyến tính và mọi vectơ $x \in \mathbb{R}^m$ đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, ..., u_m$.
- Tích vô hướng Euclide trong $\mathbb{R}^m$ là tích vô hướng được định nghĩa như sau:

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m, \ y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$<x,y> \overset{\text{ĐN}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + ...+ x_m y_m$$

- Chuẩn hay độ dài vectơ x, ký hiệu $\| x \|$: $\|x\| \overset{\text{ĐN}}{=} \sqrt{<x,x>}$
- Không gian $\mathbb{R}^m$ với tích vô hướng như trên là một không gian Euclide.
- Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^m$, các vectơ cột $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ lần

lượt gọi là vectơ đơn vị thứ 1, 2, ..., m.

4. Hệ phương trình tuyến tính chuẩn

Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I'}) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Hệ (I') gọi là ***hệ phương trình tuyến tính chuẩn*** nếu từ ma trận A, ta có thể chọn ra m cột và sắp xếp lại để được một ma trận đơn vị cấp m.

<u>Ví dụ 1</u>

a) Hệ $\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + 10x_4 - 2x_5 = 1 \\ \quad x_2 \qquad - 15x_4 + 3x_5 = 2 \\ \qquad x_3 + 3x_4 - 7x_5 = -3 \end{cases}$ là hệ phương trình chuẩn vì ma trận

hệ số $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ có các cột 1, 2, 3 sắp thành ma trận đơn vị.

b) Hệ $\begin{cases} x_1 + \quad \cdots \quad + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + \cdots \quad + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ là hệ phương trình chuẩn vì ma trận hệ số A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1\,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2\,m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m\,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ có các cột 1,2,..., m sắp thành ma trận đơn vị.

c) Hệ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$ là hệ phương trình chuẩn vì ma trận hệ số A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ có các cột 5, 3, 6 sắp thành ma trận đơn vị.

❖ Ẩn cơ bản-Nghiệm cơ bản

- Xét hệ phương trình chuẩn (I') ở trên. Khi đó, ẩn ứng với các véctơ cột đơn vị của ma trận A gọi là ***ẩn cơ bản*** (ẩn cơ sở); các ẩn khác gọi là ẩn không cơ bản. Ẩn cơ bản ứng với vectơ đơn vị thứ i gọi là ẩn cơ bản thứ i. Sắp xếp các ẩn cơ bản theo thứ tự các vectơ đơn vị 1, 2, ..., m ta được ***hệ ẩn cơ bản***. Cần lưu ý là nếu có nhiều ẩn ứng với cùng một véctơ cột đơn vị thì chỉ chọn một ẩn làm ***ẩn cơ bản,*** các ẩn còn lại là ẩn không cơ bản.

- Nghiệm của một hệ phương trình chuẩn mà các ẩn không cơ bản đều bằng 0 gọi là ***nghiệm cơ bản***. Nói cách khác, ***nghiệm cơ bản*** của một hệ phương trình tuyến tính chuẩn là nghiệm nhận được từ dạng nghiệm tổng quát khi cho các ẩn không cơ bản nhận giá trị 0.

Ví dụ 2

a) Hệ phương trình chuẩn : $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 10x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$ có các ẩn cơ bản thứ 1, 2, 3 lần lượt là x_1, x_2, x_5 và hệ ẩn cơ bản là (x_1, x_2, x_5); các ẩn không cơ bản là x_3, x_4. Một nghiệm cơ bản của hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 0, 0, -3)$.

b) Hệ phương trình chuẩn $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$ có các ẩn cơ bản thứ 1, 2, 3 lần lượt là x_5, x_3, x_6 và hệ ẩn cơ bản là (x_5, x_3, x_6); các ẩn không cơ bản là x_1, x_2, x_4. Một nghiệm cơ bản của hệ là $(x_1,x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,4,0,2, 3)$.

❖ Phép khử Gauss- Jordan

Xét hệ phương trình chuẩn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + 10x_4 \quad = 2 \\ \quad x_2 + x_3 - 15x_4 \quad = 1 \\ \quad x_2 \quad + 3x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$ có các ẩn cơ bản là x_1, x_3, x_5 và hệ ẩn cơ bản là (x_1, x_3, x_5); các ẩn không cơ bản là x_2, x_4. Nghiệm cơ bản ban đầu là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 1, 0, -3)$.

Ma trận bổ sung của hệ là

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -15 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 - h_1;\, h_3 - h_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -25 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -7 & 1 & -5 \end{array}\right) = A^*$$

Hệ phương trình chuẩn ứng với ma trận bổ sung A^* có các ẩn cơ bản là x_2, x_3, x_5 và hệ ẩn cơ bản là (x_2, x_3, x_5); các ẩn không cơ bản là x_1, x_4. Nghiệm cơ bản mới của hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, -1, 0, -5)$.

Phép biến đổi ma trận bổ sung như trên gọi là ***phép khử Gauss-Jordan*** với ***phần tử trục xoay*** là a_{12}. Phép khử này biến cột 2 thành cột vectơ đơn vị thay cho cột 1 đồng thời giữ nguyên hai cột vectơ đơn vị là cột 3 và cột 5, đưa ẩn x_1 ra khỏi hệ ẩn cơ bản và ẩn x_2 vào trong hệ ẩn cơ bản.

5. Khái niệm tập lồi, điểm cực biên

❖ Đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng, nửa không gian

- Cho hai điểm a, b trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. *Đường thẳng* qua hai điểm a, b là tập tất cả các điểm x trong $\mathbb{R}^n$ có dạng:

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

  Nếu $0 \le \lambda \le 1$ thì ta có *đoạn thẳng* nối hai điểm a và b. Khi đó, mọi điểm $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ với $0 < \lambda < 1$ đều là điểm trong của đọan thẳng nối a và b.

- Một *siêu phẳng* trong $\mathbb{R}^n$ là tập tất cả điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn phương trình tuyến tính: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$

  Trong không gian 2 chiều siêu phẳng là một đường thẳng; trong không gian 3 chiều siêu phẳng là một mặt phẳng.

- Một *nửa không gian đóng* trong $\mathbb{R}^n$ là tập tất cả điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn bất phương trình tuyến tính: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$

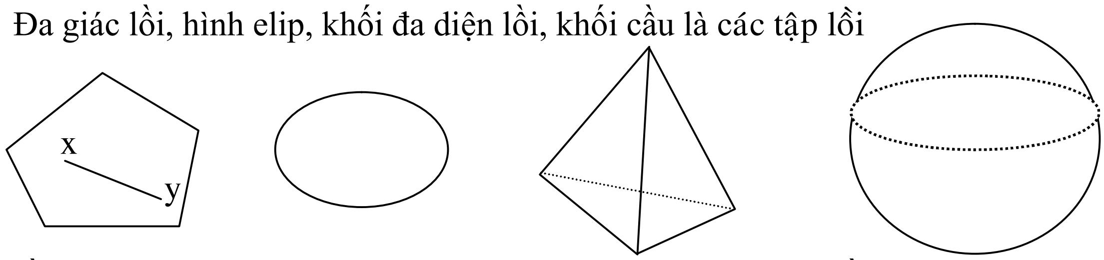
- Một *nửa không gian mở* trong $\mathbb{R}^n$ là tập tất cả điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn bất phương trình tuyến tính: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$

❖ Tập lồi (convex set)

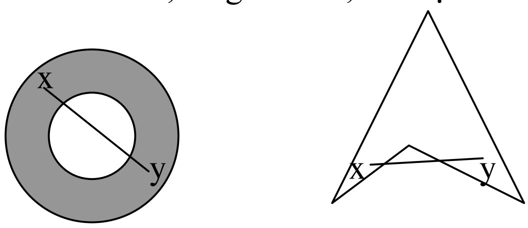
Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu : $\forall x, y \in C$, $0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Tức là nếu C chứa hai điểm nào đó thì C phải chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Ví dụ 3

a) Đa giác lồi, hình elip, khối đa diện lồi, khối cầu là các tập lồi



b) Hình vành khăn, đa giác lõm, đa diện lõm, đường elip, mặt cầu là các tập không lồi



- **Điểm cực biên** Điểm x^* của tập C gọi là điểm cực biên nếu trong C không có đoạn thẳng nào nhận x^* là điểm trong.

Ví dụ 4

a) Hình đa giác lồi có các điểm cực biên chính là các đỉnh của nó.
b) Hình đa diện lồi có các điểm cực biên chính là các đỉnh của nó.
c) Hình elip đóng có các điểm cực biên là mọi điểm thuộc đường biên của nó.
d) Hình cầu đóng có các điểm cực biên là mọi điểm thuộc mặt cầu biên của nó.

Bài tập

Bài 0.1 Cho hệ phương trình chuẩn : $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_3 - x_5 + x_6 = -3 \end{cases}$

a) Tìm hệ ẩn cơ bản, nói rõ thứ tự các ẩn cơ bản.
b) Tìm nghiệm cơ bản ban đầu.
c) Tìm hai hệ ẩn cơ bản mới và hai nghiệm cơ bản mới. (*áp dụng phép khử Gauss-Jordan*)

Bài 0.2 Chứng minh rằng số nghiệm cơ bản của một hệ phương trình tuyến tính chuẩn là hữu hạn.

Bài 0.3

a) Chứng minh rằng giao của hai tập lồi là một tập lồi. Suy ra giao của một số hữu hạn tập lồi là tập lồi.
b) Hãy lấy một ví dụ chứng tỏ rằng hợp của hai tập lồi có thể không là một tập lồi.

Bài 0.4 Tìm ba nghiệm cơ bản của các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 10x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_5 + x_6 = 3 \end{cases}$

Câu hỏi trắc nghiệm

(chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 1

Cho hệ phương trình tuyến tính : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (I). Gọi A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình (I). Khẳng định nào sau đây sai?

A) $r(A) = r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) có nghiệm .

B) $r(A) = r(\overline{A}) < n \Leftrightarrow$ HPT (I) có vô số nghiệm.

C) $r(A) < r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) vô nghiệm.

D) Nếu A là ma trận vuông và detA = 0 thì hệ (I) vô nghiệm.

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Mọi hệ phương trình tuyến tính chuẩn đều có nghiệm.

B) Mọi hệ phương trình tuyến tính có số phương trình nhiều hơn số ẩn số đều vô nghiệm.

C) Trong một nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính chuẩn thì mọi ẩn không cơ bản đều nhận giá trị 0.

D) Số nghiệm cơ bản của một hệ phương trình tuyến tính chuẩn hữu hạn.

Câu 3 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Giao của hai tập lồi là một tập lồi.

B) Mọi điểm biên của một tập lồi đều là điểm cực biên.

C) Mọi điểm cực biên của một tập lồi đều là điểm biên.

D) Mọi đa giác lồi đều là tập lồi.

Câu 4 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Giao của một số hữu hạn tập lồi là tập lồi.

B) Trong không gian, mọi đa diện lồi đều là tập lồi.

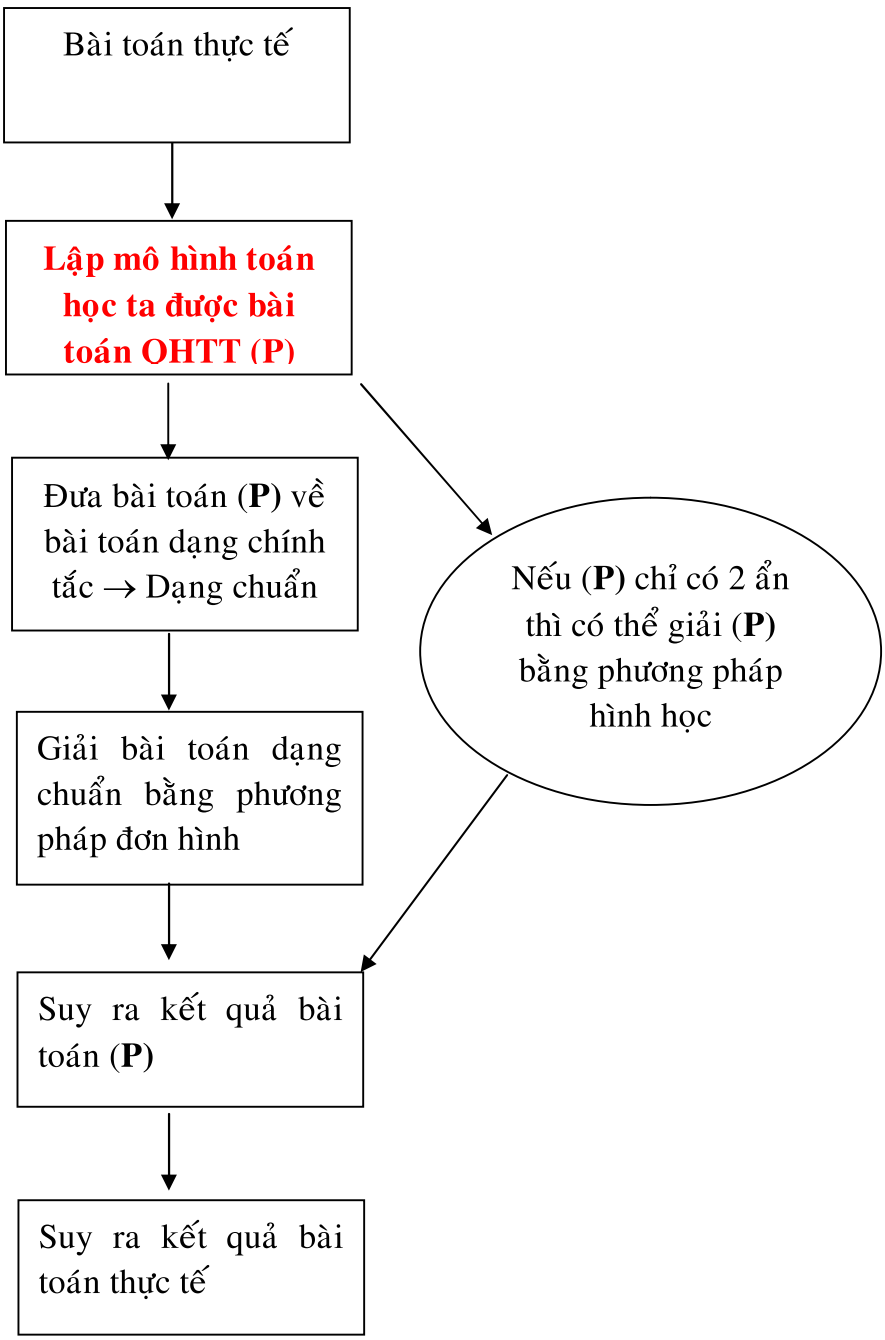
C) Trong không gian, mọi đỉnh của đa diện lồi đều là điểm cực biên.

D) Mặt cầu là tập lồi.

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Sơ đồ sau đây cho biết cấu trúc logic của chương 1 và yêu cầu tối thiểu đối với sinh viên là phải làm được tất cả các việc chỉ ra trong sơ đồ.



§ 1. CÁC VÍ DỤ DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH-LẬP MÔ HÌNH TOÁN HỌC

Trong bài này, thông qua một số bài toán cụ thể, bạn sẽ học cách phân tích định tính và định lượng rồi từ đó lập mô hình toán học cho một số vấn đề thực tế.

1.1. Các ví dụ

Ví dụ 1 (bài toán lập kế hoạch sản xuất)

Một xí nghiệp có 3000 đơn vị nguyên liệu loại A, 5000 đơn vị nguyên liệu loại B, 2000 đơn vị nguyên liệu loại C. Các nguyên liệu trên dùng để sản xuất 4 loại hàng hóa : I, II, III, IV. Định mức nguyên liệu cần thiết và lợi nhuận khi sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho trong bản sau đây:

	I	II	III	IV
A	12	5	15	6
B	14	8	7	9
C	17	13	9	12
Lợi nhuận	5	8	4	6

Hãy lập mô hình bài toán xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số đơn vị sản phẩm loại I, II, III, IV cần sản xuất. Theo đề bài ta có:

- ♦ Tổng lợi nhuận cao nhất: $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$
- ♦ Lượng nguyên liệu tiêu thụ không vượt quá số lượng nguyên liệu hiện có:

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \le 3000 \\ 14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \le 5000 \\ 17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 2000 \end{cases}$$

- ♦ Số đơn vị sản phẩm mỗi loại không âm: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$
- ♦ Nếu sản phẩm là thành phẩm như bàn, ghế, quần áo, tàu, xe, máy móc,..thì cần có thêm điều kiện số sản phẩm là số nguyên.

Tóm lại ta có bài toán

Tìm (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho thỏa mãn:

(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$

(2) $$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \le 3000 \\ 14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \le 5000 \\ 17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 2000 \end{cases}$$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ (có thể cần thêm điều kiện nguyên)

Ví dụ 2 (bài toán cắt vật liệu)

Một công ty may mặc cần sản xuất 5000 quần và ít nhất 3000 áo. Mỗi tấm vải có 6 cách cắt với số lượng quần áo tương ứng được cho trong bảng sau:

Cách cắt	**Quần**	**Áo**
1	90	35
2	80	55
3	70	70
4	60	90
5	120	0
6	0	100

Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án cắt quần áo sao cho tổng số tấm vải sử dụng là ít nhất?

Giải

Gọi $x_1, x_2, ..., x_6$ lần lượt là số tấm vải cắt theo cách 1, 2,..., 6. Theo đề bài ta có :

- Tổng số tấm vải sử dụng là ít nhất : $x_1+ x_2+ ...+ x_6 \to \min$
- Yêu cầu cần sản xuất 5000 quần : $90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 +120x_5 = 5000$
- Yêu cầu cần sản xuất ít nhất 3000 áo : $35x_1 + 55x_2 + 70x_3 + 90x_4 +100x_6 \geq 3000$
- Số tấm vải sử dụng cho mỗi cách cắt không âm và nguyên vì mỗi cách cắt cần sử dụng số nguyên tấm vải: $x_1\geq 0, x_2\geq 0, ..., x_6 \geq 0$ và nguyên.

Tóm lại ta có bài toán

Tìm $(x_1, x_2, ..., x_6)$ sao cho thỏa mãn:

(1) $f(x_1, x_2, ..., x_6) = x_1+ x_2+ ...+ x_6 \to \min$

(2) $\begin{cases} 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 + 120x_5 = 5000 \\ 35x_1 + 55x_2 + 70x_3 + 90x_4 + 100x_6 \geq 3000 \end{cases}$

(3) $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0, ..., x_6 \geq 0$ và nguyên

Ví dụ 3 (bài toán dinh dưỡng)

Để nuôi một loại gia súc trong một ngày (24 giờ) cần có khối lượng tối thiểu các chất đạm, đường và chất khoáng tương ứng là 180 gam, 120 gam và 60 gam. Trên thị trường hiện có bán 3 loại thức ăn A , B, C với tỷ lệ các chất trong một kg thức ăn được cho trong bảng sau (đơn vị là gam) :

Chất bổ / Thức ăn	Đạm	Đường	Khóang
A	10	30	2
B	20	40	1
C	25	20	3

Biết chi phí để mua mỗi kg thức ăn A, B, C tương ứng là 3000 đồng, 5000 đồng, 3500 đồng. Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án mua thức ăn các loại A, B, C sau cho đảm bảo được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu với chi phí thấp nhất.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là lượng thức ăn A, B, C cần mua (đơn vị là kg). Theo đề bài ta có:

♦ Tổng chi phí thấp nhất : $3000x_1 + 5000x_2 + 3500x_3 \to \min$

♦ Bảo đảm nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu : $\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 25x_3 \ge 180 \\ 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 \ge 120 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 60 \end{cases}$

♦ Số lượng thức ăn mỗi loại cần mua không âm : $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

Tóm lại ta có bài toán

Tìm (x_1, x_2, x_3) sao cho thỏa mãn:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 3000x_1 + 5000x_2 + 3500x_3 \to \min$

(2) $\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 25x_3 \ge 180 \\ 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 \ge 120 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 60 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

Ví dụ 4 (bài toán vận tải)

Có m nơi A_1, A_2,...,A_m cung cấp một loại mặt hàng nào đó với khối lượng tương ứng là a_1, a_2,..., a_m. Cùng lúc đó có n nơi B_1, B_2,..., B_n tiêu thụ loại hàng đó với khối lượng yêu cầu tương ứng là b_1, b_2,..., b_n (*đơn vị khối lượng tính bằng tấn*). Ta gọi A_i là điểm phát hàng thứ i $\left(i = \overline{i,m}\right)$ và B_j là điểm thu hàng thứ j $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Giả sử tổng lượng hàng cần phát đi ở các điểm phát bằng tổng lượng hàng thu về ở các điểm thu $\left(\sum a_i = \sum b_j\right)$, tức là bài tóan *cân bằng thu phát.*

Cho biết chi phí chuyên chở một tấn hàng từ A_i đến B_j là c_{ij} đồng. Ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$ gọi là ma trận cước phí.

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu tấn hàng để:

- Các điểm phát đều phát hết hàng.
- Các điểm thu đều nhận đủ hàng yêu cầu.
- Tổng cước phí phải trả là ít nhất.

Giải

∗ ***Phân tích bài toán:*** Đặt x_{ij} là số tấn hàng chuyển từ A_i đến B_j.

a) Tất nhiên $x_{ij} \ge 0\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$

b) Tổng lượng hàng phát đi từ A_i đến tất cả các B_j là:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

Vì các điểm phát phải phát hết hàng nên ta có : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$

c) Tổng lượng hàng thu về B_j từ tất cả các A_i là:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

Vì các điểm thu phải thu đủ hàng nên ta có : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$

d) Tổng cước phí phải trả: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Tổng này càng nhỏ càng tốt.

Từ các phân tích trên, ta có mô hình bài toán:

(1) $\quad f(x) = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} \to \min$

(2) $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(i = \overline{1,n}\right) \end{cases}$

(3) $x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$

Ví dụ 5 (bài toán kiểm soát ô nhiễm)

Một công ty cement sản xuất mỗi năm 2.500.000 thùng cement. Khi sản xuất mỗi thùng cement sinh ra 2 kg bụi. Công ty được yêu cầu sử dụng thiết bị lọc bụi: thiết bị A lọc được 1,5 kg bụi/thùng cement, chi phí hoạt động là 1.400 đồng/thùng; thiết bị B lọc được 1,8 kg bụi/thùng cement, chi phí hoạt động là 1.800 đồng/thùng . Công ty được yêu cầu phải giảm bớt ít nhất 4.200.000 kg bụi mỗi năm. Hỏi công ty nên sử dụng mỗi loại thiết bị lọc như thế nào để đạt yêu cầu và chi phí thấp nhất? Hãy lập mô hình toán học của bài toán này.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số thùng cement sử dụng thiết bị lọc bụi A, B mỗi năm. Theo đề bài ta có:

- Tổng chi phí thấp nhất: $1.400x + 1.800y \to \min$.
- Số thùng cement có sử dụng thiết bị lọc bụi không vượt qua số thùng cement sản xuất : $x + y \leq 2.500.000$
- Công ty được yêu cầu phải giảm bớt ít nhất 4.200.000 kg bụi mỗi năm:

  $1,5x + 1,8y \geq 4.200.000$
- Số thùng cement có sử dụng thiết bị lọc bụi mỗi loại không âm: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Tóm lại ta có bài toán

(1) $f(x,y) = 1.400x + 1.800y \to \min$

(2) $\begin{cases} x + y \le 2.500.000 \\ 1,5x + 1,8y \ge 4.200.000 \end{cases}$

(3) $x \ge 0,\ y \ge 0$

Ví dụ 6 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)

Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây.

Một công ty may mặc ký hợp đồng giao cho khách hàng 260.000 bộ quần áo trong thời gian 1 tháng. Công ty có ba xí nghiệp A, B, C và quần áo phải được sản xuất và đóng gói thành bộ tại mỗi xí nghiệp. Năng lực sản xuất trong một tháng và chi phí sản xuất đối với mỗi bộ quần áo của các xí nghiệp trong thời gian thường trong thời gian tăng ca được cho trong bảng sau:

Xí nghiệp / Thờigian SX	Xí nghiệp A		Xí nghiệp B		Xí nghiệp C	
	Năng lực sản xuất	Chi phí	Năng lực sản xuất	Chi phí	Năng lực sản xuất	Chi phí
Thời gian thường	90.000 bộ/tháng	73.000 đồng/bộ	50.000 bộ/tháng	74.500 đồng/bộ	80.000 bộ/tháng	74.000 đồng/bộ
Thời gian tăng ca	40.000 bộ/tháng	74.200 đồng/bộ	22.000 bộ/tháng	75.500 đồng/bộ	35.000 bộ/tháng	75.000 đồng/bộ

Biết rằng số bộ quần áo sản xuất tại hai xí nghiệp B và C phải ít nhất là 156.000 bộ. Hỏi phải phân công sản xuất cho các xí nghiệp như thế nào để hoàn thành hợp đồng với chi phí thấp nhất.

Giải

Gọi: x_1, x_2 lần lượt là số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại xí nghiệp A trong một tháng; y_1, y_2 lần lượt là số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại xí nghiệp B trong một tháng; z_1, z_2 lần lượt là số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại xí nghiệp C trong một tháng.

Ta có:

- Tổng chi phí sản xuất bé nhất:
  $73.000x_1 + 74.200x_2 + 74.500y_1 + 75.500y_2 + 74.000z_1 + 75.000z_2 \to \min$
- Cần sản xuất đủ 260.000 để giao cho khách hàng:
  $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 260.000$
- Số bộ quần áo sản xuất phải không âm và nguyên: $x_1 \ge 0$ và x_1 nguyên, $x_2 \ge 0$ và x_2 nguyên, $y_1 \ge 0$ và y_1 nguyên, $y_2 \ge 0$ và y_2 nguyên, $z_1 \ge 0$ và z_1 nguyên, $z_2 \ge 0$ và z_2 nguyên.

- Số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại mỗi xí nghiệp không vượt quá năng lực sản xuất của xí nghiệp đó: $x_1 \le 90.000$, $x_2 \le 40.000$, $y_1 \le 50.000$, $y_2 \le 22.000$, $z_1 \le 80.000$, $z_2 \le 35.000$.
- Số bộ quần áo sản xuất tại hai xí nghiệp B và C phải ít nhất là 156.000 bộ: $y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \ge 156.000$

Tóm lại ta có mô hình bài toán là tìm $x_1, x_2, y_1, y_2,\ z_1, z_2$ sao cho:

(1) $73.000x_1 + 74.200x_2 + 74.500y_1 + 75.500y_2 + 74.000z_1 + 75.000z_2 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 260.000 \\ x_1 \le 90.000; x_2 \le 40.000 \\ y_1 \le 50.000; y_2 \le 22.000 \\ z_1 \le 80.000; z_2 \le 35.000 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \ge 560.000 \end{cases}$$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, z_1 \ge 0, z_2 \ge 0$ và $x_1, x_2, y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2$ nguyên

Ví dụ 7 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)

Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây.

Một công ty may mặc cần sản xuất 3 loại sản phẩm may mặc là ***A, B, C*** và mỗi sản phẩm này đều phải qua 3 công đoạn là ***công đoạn 1***, ***công đoạn 2***, ***công đoạn 3***. ***Chi phí sản xuất trung bình*** (gồm tất cả chi phí như nguyên liệu, nhân lực,...) đối với mỗi sản phẩm, giá bán tương ứng của mỗi sản phẩm, tổng số giờ lao động ứng với mỗi công đoạn mà công ty có được trong một tuần và định mức tiêu hao số giờ lao động của mỗi sản phẩm ứng với mỗi công đoạn được cho trong bảng sau:

	Định mức tiêu hao số giờ lao động của mỗi sản phẩm ứng với mỗi công đoạn			Tổng số giờ lao động ứng với ***mỗi công đoạn*** mà công ty có được trong 1 tuần
	A	***B***	***C***	
Công đoạn 1	3	2,5	2	350 giờ (CĐ1)
Công đoạn 2	5	3	5	650 giờ (CĐ2)
Công đoạn 3	4	2	3	400 giờ (CĐ3)
Chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm	\$6	\$5,5	\$5	
Giá bán mỗi sản phẩm	\$11	\$9	\$8,5	

Biết các sản phẩm sản xuất ra đều có thể bán hết với điều kiện số sản phẩm ***A*** không được vượt quá tổng của số sản phẩm ***B*** và ***C***. Hỏi mỗi tuần công ty cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là ***A, B, C*** với số lượng tương ứng bao nhiêu để ***lợi nhuận trung bình lớn nhất***?

Giải

Gọi x, y, z là số sản phẩm loại A, B, C mà công ty cần sản xuất mỗi tuần.

Lợi nhuận lớn nhất: $f(x,y,z) = (11-6)x + (9-5{,}5)y + (8{,}5-5)z \to \max$

Số giờ lao động sử dụng *mỗi công đoạn* không vượt quá tổng số giờ lao động *mỗi công đoạn* mà công ty có được trong 1 tuần:

Công đoạn 1: $3x + 2{,}5y + 2z \le 350$

Công đoạn 2: $5x + 3y + 5z \le 650$

Công đoạn 3: $4x + 2y + 3z \le 400$

Số sản phẩm loại A không vượt quá tổng số sản phẩm loại B và C: $x \le y + z$

Số sản phẩm mỗi loại không âm và nguyên: $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ và x, y, z nguyên

Tóm lại ta có mô hình bài toán là là tìm các số x, y, z sao cho:

(1) $f(x,y,z) = 5x + 3{,}5y + 2{,}5z \to \max$

(2) $\begin{cases} 3x + 2{,}5y + 2z \le 350 \\ 5x + 3y + 5z \le 650 \\ 4x + 2y + 3z \le 400 \\ x \le y + z \end{cases}$

(3) $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ và x, y, z nguyên

1.2. *Quy tắc vàng khi lập mô hình toán học bài toán thực tế và khái niệm tối ưu*:

Mỗi ý diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường phải được diễn đạt tương đương bằng ngôn ngữ toán học. Ngôn ngữ thông thường đôi khi bất định (không tường minh, không rõ ràng, mờ, ngẫu nhiên,…) nên khi lập mô hình cần chú ý đến yếu tố này (định tính, định lượng,…).

Cuộc sống luôn nảy sinh những vấn đề (bài toán) cần giải quyết. Mỗi khi giải quyết một vấn đề, sau khi đã tìm ra một phương án, chúng ta thường hài lòng ngay với phương án vừa tìm được, mà ít nghĩ rằng vấn đề còn có thể giải quyết bằng phương án khác tốt hơn. Như vậy, khi tìm phương án để giải quyết một vấn đề, chúng ta phải tìm phương án tốt nhất (nếu có thể). ***Phương án tốt nhất để giải quyết một vấn đề với một số điều kiện, ràng buộc cho trước gọi là phương án tối ưu.***

Mỗi vấn đề cần giải quyết luôn nằm trong một hệ thống nhất định. Bản thân hệ thống này lại nằm trong hệ thống khác lớn hơn gồm nhiều hệ thống nhỏ. Các hệ thống này chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau theo các chiều *không gian và thời gian*. Hơn nữa, mỗi vấn đề lại chứa đựng bên trong nó những hệ thống nhỏ hơn và chúng cũng chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau. Do đó, để bảo đảm vấn đề mà chúng ta quan tâm được giải quyết một cách chính xác, chúng ta cần phải chú ý đến tất cả những mối liên hệ và ảnh hưởng nêu trên.

1.3. Một số bước cơ bản để lập mô hình toán học và giải bài toán thực tế

- ***Bước 1*** Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề thực tế; tức là xác định các yếu tố, ý nghĩa và qui luật mà chúng phải tuân theo. Nói cách khác là phát biểu mô hình bằng lời hay biểu đồ các điều kiện kinh tế, kỹ thuật, tự nhiên, xã hội, các mục tiêu cần đạt được,....
- ***Bước 2*** Diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học mô hình định tính ở trên để được mô hình toán học của vấn đề đang xét. Ở bước này, ta chọn các biến phù hợp đặc trưng cho các yếu tố hoặc các đại lượng đang xét và thiết lập các phương trình, bất phương trình về mối liên hệ giữa chúng.
- ***Bước 3*** Khảo sát và giải bài toán có được ở bước 2 :
    - Sử dụng các công cụ toán học phù hợp và cụ thể hóa bằng thuật toán.
    - Nếu kích thước bài toán lớn không thể giải bằng tay thì phải sử dụng máy tính và phần mềm phù hợp.
    - Tiến hành tính toán để cho ra kết quả.
- ***Bước 4*** Phân tích và kiểm định lại kết quả có được ở bước 3. Trong bước này, cần phải xác định mức độ phù hợp của mô hình và kết quả tính toán với bài toán thực tế. Có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Mô hình và kết quả tính toán phù hợp với thực tế. Khi đó ta cần lập bảng tổng kết ghi rõ cách đặt vấn đề, các bước phân tích lập mô hình, các số liệu, thuật toán và phần mềm sử dụng,.... (lập bảng tổng kết sẽ thuận tiện cho việc phản biện, triển khai thực hiện, kiểm tra đánh giá, hiệu chỉnh .....).

Khả năng 2: Mô hình và kết quả tính toán không phù hợp với thực tế. Khi đó, ta cần kiểm tra lại toàn bộ để tìm ra các nguyên nhân. Các nguyên nhân thường gặp là:

- Mô hình định tính chưa phản ánh đúng và đầy đủ thực tế. Cần xem xét lại cách đặt vấn đề và các bước phân tích để đi đến mô hình này.

- Mô hình toán học chưa phù hợp với mô hình định tính.
- Các số liệu ban đầu không phản ánh đúng các yếu tố hoặc đại lượng thực tế(giá cả, chi phí, định mức nguyên liệu, năng suất,......).
- Ta đã sử dụng công cụ toán học không phù hợp hay chương trình máy tính không chính xác.

Bài tập

Bài 1.1 Một xí nghiệp dệt hiện có 3 loại sợi: Cotton, Katé, Polyester với khối lượng tương ứng là 3; 2,5; 4,2 (tấn). Các yếu tố sản xuất khác có số lượng lớn. Xí nghiệp có thể sản xuất ra 3 loại vải A, B, C (với khổ bề rộng nhất định) với mức tiêu hao các loại sợi để sản xuất ra 1m vải các loại có trong bảng sau:

Loại sợi (gam)	Loại vải		
	A	B	C
Cotton	200	200	100
Katé	100	200	100
Polyester	100	100	200

Biết lợi nhuận thu được khi sản xuất 1m vải các loại A, B, C tương ứng là 9500, 10800, 8500 (VNĐ). Sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết với số lượng không hạn chế, nhưng điều kiện tiêu thụ sản phẩm yêu cầu số m vải B và C phải có tỉ lệ là 1:2. Hãy lập mô hình bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho lợi nhuận lớn nhất.

Bài 1.2 Một xí nghiệp đồ gỗ dự định sản xuất bàn, ghế và tủ. Biết định mức tiêu hao các yếu tố sản xuất khi làm ra 1 sản phẩm cho trong bảng sau:

Yếu tố sản xuất	Sản phẩm		
	Bàn	Ghế	Tủ
Lao động (ngày công)	2	0,5	3
Chi phí SX (ngàn đồng)	200	50	350

Ngoài ra, biết giá bán 1 sản phẩm bàn, ghế, tủ tương ứng là 240, 60, 410 (ngàn đồng) và xí nghiệp hiện có số lao động là 100 ngày công, số vốn là 120 triệu đồng. Giả sử sản phẩm tiêu thụ theo toàn bộ lô hàng sản xuất ra với số lượng không hạn chế, nhưng số bàn và số ghế phải tuân theo tỉ lệ 1:6. Hãy lập mô hình bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho lợi nhuận lớn nhất.

Bài 1.3 Người ta cần cắt những thanh sắt dài 2m thành ít nhất 400 đoạn dài 0,9m; ít nhất 500 đoạn dài 0,8m; ít nhất 150 đoạn dài 0,6m. Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án cắt sao cho tổng chiều dài sắt thừa là ít nhất. Cho rằng số lượng thanh sắt hiện có là rất lớn.

Bài 1.4 Một xí nghiệp cơ khí cần cắt những thanh sắt dài 3m thành ít nhất 200 đoạn dài 1,2m; ít nhất 300 đoạn dài 0,9m; ít nhất 600 đoạn dài 0,8m. Giả sử hiện tại xí nghiệp chưa có thanh sắt nào. Hãy lập mô hình bài toán tìm số thanh sắt phải mua và phương án cắt sao cho thỏa mãn được nhu cầu về các đoạn sắt và tổng chi phí mua các thanh sắt là ít nhất.

Bài 1.5 Một công ty muốn có kế hoạch quảng cáo một loại sản phẩm trong vòng một tháng với tổng chi phí là 120 triệu đồng. Các phương tiện quảng cáo được chọn là: truyền hình, báo và phát thanh với các dữ liệu như sau:

Phương tiện quảng cáo	Chi phí cho mỗi lần quảng cáo (tr.đồng)	Số lần quảng cáo tối đa trong 1 tháng	Dự đoán số người tiếp nhận quảng cáo trong mỗi lần
Truyền hình (1 phút)	1,2	90	10.000
Báo (1/2 trang)	0,9	28	15.000
Phát thanh (1 phút)	0,4	120	5.000

Vì lý do chiến lược tiếp thị, công ty yêu cầu ít nhất phải có 60 lần quảng cáo trên truyền hình trong một tháng. Hãy lập mô hình bài toán xác định kế hoạch quảng cáo tối ưu.

Bài 1.6 Biết nhu cầu các chất dinh dưỡng của một loại gia súc như sau (% trong tổng số khối lượng thức ăn):

Chất dinh dưỡng	Khối lượng tối thiểu	Khối lượng tối đa
Protit	22,9	Không han chế
Gluxit	42	75
Lipit	9	15
Xơ (Xenlulo)	7,8	Không hạn chế

Biết tỉ lệ % các chất trên có trong các loại thức ăn thô gồm cám, lúa, bắp, bột cá và giá thức ăn như sau:

Chất dinh dưỡng	Thức ăn			
	Cám	Lúa	Bắp	Bột cá
Protit	15	8	10	62
Gluxit	60	50	60	6
Lipit	15	4	6	20
Xơ (Xenlulo)	2	15	9	3
Giá (1.000đ/kg)	7	6	5,2	9

Hãy lập mô hình bài toán xác định tỉ lệ tối ưu các loại thức ăn trong thức ăn hỗn hợp (được tạo ra từ 4 loại thức ăn trên).

Bài 1.7 (bài toán lập tuyến độ sản xuất tối ưu) Một công ty sản xuất đồ điện làm ra một loại máy biến thế cỡ lớn để cung cấp cho ngành công nghiệp điện, có các đơn đặt hàng trong 4 tháng liên tiếp và chi phí sản xuất của mỗi máy biến thế trong các tháng như sau:

Dữ liệu	Tháng			
	1	2	3	4
Đơn đặt hàng (đv)	58	36	60	72
Chi phí SX trong TG thường (tr.đ/đv)	70	68	68	69
Chi phí SX trong TG phụ trội (tr.đ/đv)	75	72	72	74

Năng lực sản xuất của công ty là 50 máy/tháng với thời gian thường (làm trong giờ) và 20 máy/tháng với thời gian phụ trội (làm ngoài giờ). Chi phí lưu kho cho 1 máy là 1 triệu đồng/tháng và được tính dựa vào só hàng tồn kho cuối mỗi tháng. Công ty có 15 máy nằm trong kho vào ngày 1/1 và mong muốn có không ít hơn là 10 máy lưu kho vào ngày 30/4. Hãy lập mô hình bài toán xác định tiến độ sản xuất tối ưu.

Bài 1.8 Một cửa hàng mua bán có dự đoán về giá mua và giá bán của một loại hàng trong 3 tháng liên tiếp như sau:

Tháng	1	2	3
Giá mua (1.000 đ/đv)	12	10	14
Giá bán (1.000 đ/đv)	16	12	20

Chi phí lưu kho 1 đv hàng là 1.000 đ/tháng ; số hàng tính chi phí lưu kho dựa vào số hàng tồn kho cuối mỗi tháng và tiền lưu kho trả vào cuối mỗi tháng. Giả sử hàng được mua và bán theo cả lô với khối lượng tùy ý, nhưng có dự đoán khối lượng hàng tối đa có thể mua được trong tháng 2 là 1.000 đv. Cửa hàng có dung tích kho chứa tối đa là 1.000 đv và số vốn có thể huy động được vào đầu tháng 1 là 24 triệu đồng.

Ngoài ra, vào đầu tháng 1 cửa hàng đã có 200 đv hàng và mong muốn vào cuối tháng 3 phải có ít nhất 300 đv hàng tồn kho.

Hãy lập mô hình bài toán xác định khối lượng hàng cần mua vào và bán ra trong mỗi tháng sao cho tổng lợi nhuận thu được là nhiều nhất qua 3 tháng hoạt động.

Bài 1.9 Một nhà đầu tư có 10 tỉ đồng, muốn đầu tư vào 3 lĩnh vực: chứng khoán, gửi tiết kiệm và bất động sản. Biết rằng đầu tư vào chứng khoán sau 3 năm sẽ có lãi suất là 40%, đầu tư vào gửi tiết kiệm có lãi suất hàng năm là 10% và đầu tư vào bất động sản sau 3 năm sẽ có lãi suất là 50%. Ngoài ra, để giảm thiểu rủi ro nhà đầu tư quyết định tổng số tiền gửi tiết kiệm phải ít nhất là 25% tổng vốn đầu tư, và tổng số tiền đầu tư vào chứng khoán không vượt quá 40% tổng vốn đầu tư.

Hãy lập mô hình bài toán xác định kế hoạch đầu tư trong 3 năm sao cho tổng doanh thu lớn nhất. Giả sử rằng tiền lãi (gửi tiết kiệm) được sử dụng để đầu tư tiếp và nhà đầu muốn đầu tư hết toàn bộ số tiền.

Bài 1.10 Một xí nghiệp có 200 công nhân gồm: 50 loại A_1 , 70 loại A_2, 80 loại A_3 . Xí nghiệp lại có 200 máy gồm: 40 loại B_1, 60 loại B_2, 30 loại B_3, 70 loại B_4.Khi sản xuất mỗi công nhân sử dụng một máy để tạo ra cùng một loại sản phẩm. Năng suất của mỗi loại công nhân khi sử dụng mỗi loại máy được cho trong bảng sau (sản phẩm/ giờ).

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70
A_1: 50	8	5	5	3
A_2: 70	6	9	8	7
A_3: 80	4	6	6	5

Hỏi phải phân công lao động như thế nào để trong 1 giờ tạo ra được nhiều sản phẩm nhất?

Bài 1.11 *Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây.*
Một nhà máy chuyên sản xuất hai loại sản phẩm S_1 , S_2 từ hai loại nguyên liệu N_1 và N_2. Các sản phẩm này được gia công lần lượt trong hai phân xưởng A và B. Thời gian (đơn vị tính : giờ) và định mức tiêu hao nguyên liệu (đơn vị nguyên liệu) cần sử dụng cho việc sản xuất ra mỗi đơn vị sản phẩm trong các phân xưởng được cho trong bảng sau :

Phân xưởng / Sản phẩm	A		B		Nguyên liệu được sử dụng tối đa trong 1 tuần
	Thời gian	N.liệu N_1	Thời gian	N.liệu N_2	
S_1	11	40	16	55	350 (đơn vị nguyên liệu N_1)
S_2	14	50	12	60	400(đơn vị nguyên liệu N_2)
Thời gian mỗi xí nghiệp được sử dụng tối đa trong 1 tuần	160 giờ		150 giờ		

Giả sử các sản phẩm sản xuất ra đều có thể bán hết với lợi nhuận là 620 USD đối với mỗi sản phẩm S_1 và 570 USD đối với mỗi sản phẩm S_2. Hỏi mỗi tuần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm S_1 và bao nhiêu sản phẩm S_2 để nhà máy có lợi nhuận lớn nhất?

Bài 1.12 Một phân xưởng cơ khí có 3 loại máy G_1, G_2, G_3 dùng để sản xuất 3 loại chi tiết C_1, C_2, C_3. Năng suất của mỗi loại máy sản xuất từng loại chi tiết được cho như sau (số chi tiết /1ca):

Chi tiết / Máy	C_1 3	C_2 1	C_3 3
G_1:2	0	15	18
G_2: 3	50	20	30
G_3:1	60	40	45

Các chi tiết sau khi sản xuất được lắp ráp thành sản phẩm. Mỗi sản phẩm bao gồm 3 chi tiết C_1, 1 chi tiết C_2 và 3 chi tiết C_3.
Hãy tìm phương án phân công thời gian làm việc cho các máy sao cho số sản phẩm được lắp ráp trong một ca sản xuất là nhiều nhất. Biết rằng phân xưởng có 2 máy G_1, 3 máy G_2 và 1 máy G_3.

Bài 1.13 Một công ty may mặc có 3 xí nghiệp I, II, III. Công ty ký hợp đồng giao cho đối tác 1500 bộ gồm áo veston và quần tây, nếu có lẻ bộ thì đối tác lấy thêm quần tây chứ không lấy thêm áo. Tổng số vải và giờ công lao động mà công ty có thể huy động được từ 3 xí nghiệp mỗi tháng là 10 000 m và 52 000 giờ. Mức tiêu hao vải và giờ công lao động để sản xuất một áo hoặc một quần tại mỗi xí nghiệp (XN) được cho trong bảng sau:

XN / Sản phẩm	I	II	III
Áo veston	3,5 m và 20 giờ	4m và 16 giờ	3,8m và 18 giờ
Quần tây	2,8 m và 10 giờ	2,6m và 10 giờ	2,5m và 15 giờ

Giả sử nếu đầu tư 10 triệu đồng vào xí nghiệp I (để mua nguyên liệu, máy móc và đầu tư vào hoạt động sản xuất) sẽ thu được 35 áo veston và 45 quần tây, vào xí nghiệp II sẽ thu được 40 áo veston và 42 quần tây, vào xí nghiệp III sẽ thu được 43 áo veston và 30 quần tây. Hãy lập mô hình toán học của bài toán lập kế hoạch đầu tư vào mỗi xí nghiệp bao nhiêu tiền để thực hiện được hợp đồng và tổng số tiền đầu tư vào các xí nghiệp ít nhất.

Bài 1.14 Một công ty sử dụng 2 loại nguyên liệu N1, N2 để sản xuất ra 1 loại sản phẩm theo 2 công nghệ khác nhau là CN1, CN2. Biết lượng nguyên liệu mỗi loại hiện có; định mức tiêu hao các loại nguyên liệu, chi phí sản xuất, lượng sản phẩm làm ra trong một giờ được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có (đv)	Định mức tiêu hao nguyên liệu trong 1 giờ	
		CN1	CN2
N1	300	2	4
N2	400	3	2
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		7	8
Chi phí (USD/giờ)		120	150

Hãy lập mô hình toán học bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho giá thành sản phẩm là thấp nhất.

Bài 1.15 *Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây*. Một công ty may mặc ký hợp đồng giao cho khách hàng 248.000 bộ quần áo trong thời gian 1 tháng. Công ty có ba xí nghiệp A, B, C và quần áo phải được sản xuất và đóng gói thành bộ tại mỗi xí nghiệp. Năng lực sản xuất trong một tháng và lợi nhuận đối với mỗi bộ quần áo (sau khi đã trừ tất cả các chi phí) của các xí nghiệp trong thời gian thường trong thời gian tăng ca được cho trong bảng sau:

Xí nghiệp / Thời gian SX	Xí nghiệp A		Xí nghiệp B		Xí nghiệp C	
	Năng lực sản xuất	Lợi nhuận	Năng lực sản xuất	Lợi nhuận	Năng lực sản xuất	Lợi nhuận
Thời gian thường	90.000 bộ/tháng	8.000 đồng/bộ	50.000 bộ/tháng	7.500 đồng/bộ	80.000 bộ/tháng	8.000 đồng/bộ
Thời gian tăng ca	40.000 bộ/tháng	7.200 đồng/bộ	20.000 bộ/tháng	6.500 đồng/bộ	30.000 bộ/tháng	7.500 đồng/bộ

Biết rằng số bộ quần áo sản xuất tại hai xí nghiệp A và B phải ít nhất là 152.000 bộ. Hỏi phải phân công sản xuất cho các xí nghiệp như thế nào để hoàn thành hợp đồng với lợi nhuận lớn nhất.

Bài 1.16 (bài toán qui hoạch phân tuyến tính) Một công ty sử dụng 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3 để sản xuất ra một loại sản phẩm tại hai xí nghiệp khác nhau là XN1, XN2. Do trình độ chuyên môn, trình độ quản lý, trang thiết bị sản xuất của hai xí nghiệp khác nhau nên định mức tiêu hao nguyên liệu và năng suất của hai xí nghiệp cũng khác nhau. Biết lượng nguyên liệu mỗi loại hiện có, định mức tiêu hao các loại nguyên liệu, chi phí sản xuất, lượng sản phẩm làm ra trong một giờ được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có (đv)	Định mức tiêu hao nguyên liệu trong 1 giờ	
		XN1	XN2
N_1	3500	40	39
N_2	3200	27	30
N_3	5600	45	43
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		112	100
Chi phí (USD/giờ)		165	162

Ban giám đốc công ty yêu cầu xí nghiệp 2 phải sản xuất ít nhất 1000 sản phẩm. Hãy lập mô hình toán học bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho giá thành sản phẩm là thấp nhất.

Bài 1.17 Một công ty sử dụng 4 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3, N_4 để sản xuất ra 3 loại sản phẩm SP_1, SP_2, SP_3. Biết lợi nhuận của mỗi đơn vị sản phẩm (*không phụ thuộc vào số giờ sản xuất và số sản phẩm được sản xuất*), số lượng nguyên liệu hiện có, định mức tiêu hao các loại nguyên liệu và lượng sản phẩm làm ra trong một giờ được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có	Định mức tiêu hao nguyên liệu (đơn vị) trong 1 giờ		
		SP_1	SP_2	SP_3
N_1	350 (đơn vị)	2	3	4
N_2	650 (đơn vị)	6	8	9
N_3	600 (đơn vị)	3	5	7
N_4	900 (đơn vị)	8	10	9
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		12	10	9
Lợi nhuận (đồng/sản phẩm)		10.000	12.000	13.000

Sản phẩm của xí nghiệp sản xuất ra đều có thể tiêu thụ hết với điều kiện tiêu thụ là số sản phẩm SP_2 và SP_3 phải có tỷ lệ 1:2. Hãy lập mô hình toán học bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho lợi nhuận lớn nhất.

Bài 1.18 Một công ty sử dụng 4 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3, N_4 để sản xuất ra một loại sản phẩm tại ba xí nghiệp khác nhau là XN1, XN2, XN3. Do trình độ chuyên môn, trình độ quản lý, trang thiết bị sản xuất của ba xí nghiệp khác nhau nên định mức tiêu hao nguyên liệu và năng suất của ba xí nghiệp cũng khác nhau. Biết lượng nguyên liệu mỗi loại hiện có, định mức tiêu hao các loại nguyên liệu, chi phí sản xuất, lượng sản phẩm làm ra trong một giờ của mỗi xí nghiệp được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có (đv)	Định mức tiêu hao nguyên liệu trong 1 giờ của mỗi xí nghiệp		
		XN1	XN2	XN3
N_1	36000	38	37	39
N_2	35000	31	32	31
N_3	63000	45	43	44
N_4	Không hạn chế	68	72	70
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		117	114	118
Chi phí (USD/giờ)		170	165	168

Hãy lập mô hình toán học bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho giá thành sản phẩm là thấp nhất, biết xí nghiệp I phải sản xuất ít nhất 1200 sản phẩm.

§ 2. CÁC DẠNG BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1. Bài toán qui hoạch tuyến tính tổng quát

Tìm $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\ (\max)$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{bmatrix} \le b_i \\ \ge b_i \\ = b_i \end{bmatrix}, \ i = 1, 2, ..., m$$

$$(3) \quad x_j \begin{bmatrix} \ge 0 \\ \le 0 \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix}, j = 1, 2, ..., n$$

- ♦ f(x) gọi là hàm mục tiêu.
- ♦ Mỗi phương trình hoặc bất phương trình ở (2) gọi là một ràng buộc. Vậy có m ràng buộc.
- ♦ (3) gọi là ràng buộc về dấu của các ẩn số.
- ♦ Tập D trong $\mathbb{R}^n$ thỏa (2) và (3) gọi là miền ràng buộc hay ***miền phương án***.
- ♦ Mỗi vectơ $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa (2) và (3) gọi là một ***phương án*** (PA).
- ♦ Phương án x^* thỏa (1) gọi là ***phương án tối ưu*** (PATƯ) và $f(x^*)$ gọi là giá trị tối ưu của bài toán; tức là $f(x^*) \le f(x)\ \forall x \in D$ đối với bài toán $f \to \min$, $f(x^*) \ge f(x)\ \forall x \in D$ đối với bài toán $f \to \max$.
- ♦ Việc ***giải bài toán QHTT*** là ***tìm PATƯ*** và ***giá trị hàm mục tiêu ứng với PATƯ*** đó; hoặc ***chỉ rõ bài toán không có phương án tối ưu***.

❖ ***Nhận xét*** $f(x) \to \min$ tương đương với $-f(x) \to \max$. Do đó, mọi bài toán có hàm mục tiêu min đều có thể chuyển về bài toán có hàm mục tiêu max và ngược lại.

Ví dụ 1 Tìm $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ sao cho

$$(1) \quad f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min\ (\max)$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

(3) x_1 tùy ý, $x_2 \ge 0$, $x_3 \le 0$

Ví dụ 2 Tìm $x = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5$ sao cho

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \to \max\ (\min)$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & \le 17 \\ 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & =18 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & \ge -20 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & \le 100 \end{cases}$$

(3) $x_1, x_4 \ge 0$; $x_2, x_3 \le 0$; x_5 tùy ý

Ví dụ 3 Các bài toán lập ở ví dụ 3, 4, 5 bài §1 đều có dạng tổng quát.

2.2. Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc:(Canonical form)

Tìm $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\ (\max)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, 2, ..., m$

(3) $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, ..., n$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử m ràng buộc ở (2) là độc lập tuyến tính. Tức là, nếu $\overline{A}$ là ma trận bổ sung của hệ phương trình tuyến tính (2) thì $r(\overline{A}) = m$.

Bất kỳ bài toán QHTT nào cũng có thể đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc bằng các phép biến đổi tương đương (đưa thêm vào các ẩn phụ) như sau:

- *Biến đổi 1* Mỗi ràng buộc là bất phương trình dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ được đưa về phương trình bằng cách ***cộng*** vế trái với một ***ẩn phụ*** $x_{n+k} \ge 0$ ($k \in \{1,2,3,...\}$). Nghĩa là nó tương đương với $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+k} = b_i$. Hệ số của ***ẩn phụ*** x_{n+k} trong hàm mục tiêu là 0.
- *Biến đổi 2* Mỗi ràng buộc là bất phương trình dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$ được đưa về phương trình bằng cách *trừ* vế trái với một ***ẩn phụ*** $x_{n+k} \ge 0$ ($k \in \{1,2,3,...\}$). Nghĩa là nó tương đương với $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+k} = b_i$. Hệ số của ***ẩn phụ*** x_{n+k} trong hàm mục tiêu là 0.
- *Biến đổi 3* Mỗi biến $x_j \le 0$ thì được thay bởi $x_j = -x'_j$, với $x'_j \ge 0$.
- *Biến đổi 4* Mỗi biến x_j tùy ý thì được thay bởi $x_j = x'_j - x''_j$, với $x'_j \ge 0$, $x''_j \ge 0$.

Ví dụ 4 Đưa bài toán QHTT sau đây (bài toán (P)) về dạng chính tắc:

(1) $f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min\ (\max)$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & \le 2 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & \ge 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{cases}$$

(3) x_1 tùy ý, $x_2 \ge 0$, $x_3 \le 0$

Giải

Để đưa bài toán về dạng chính tắc, ta phải đưa các ràng buộc bất phương trình về phương trình, đồng thời tất cả các ẩn số đều phải không âm. Như vậy, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

- Cộng vế trái ràng buộc thứ nhất ***ẩn phụ*** $x_4 \ge 0$ và hệ số trong hàm mục tiêu của x_4 là 0.
- Trừ vế trái ràng buộc thứ hai ***ẩn phụ*** $x_5 \ge 0$ và hệ số trong hàm mục tiêu của x_5 là 0.
- Thay $x_1 = x_1' - x_1''$, với $x_1' \ge 0$, $x_1'' \ge 0$. Thay $x_3 = -x_3'$, với $x_3' \ge 0$.

Ta có ***bài toán chính tắc*** $(\overline{P})$ tương ứng với ***bài toán (P)*** là:

(1') $\overline{f}(\overline{x}) = 2x_1' - 2x_1'' - x_2 - x_3' \rightarrow \min (\max)$

$$(2')\ \begin{cases} x_1' - x_1'' & -2x_2 & -x_3' & +x_4 & =2 \\ 2x_1' - 2x_1'' & -2x_2 & +x_3' & -x_5 & =3 \\ x_1' - x_1'' & +x_2 & -x_3' & & =4 \end{cases}$$

(3') $x_1' \ge 0$, $x_1'' \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3' \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$

Nhận xét (liên hệ giữa bài toán tổng quát và bài toán chính tắc)

Gọi D là miền phương án của bài toán tổng quát (P) và $\overline{D}$ là miền phương án của bài toán chính tắc $(\overline{P})$. Vì $f(x) = \overline{f}(\overline{x})$, $\forall x \in D$ và $\forall \overline{x} \in \overline{D}$ nên ta có:

- Bài toán (P) có phương án khi và chỉ khi $(\overline{P})$ có phương án. (vì $D \ne \emptyset \Leftrightarrow \overline{D} \ne \emptyset$)
- Nếu bài toán $(\overline{P})$ không có PATƯ thì bài toán (P) không có PATƯ.
- Rõ ràng, $(x_1', x_1'', x_2, x_3', x_4, x_5)$ là phương án tối ưu của bài toán $(\overline{P})$ khi và chỉ khi $(x_1' - x_1'', x_2, -x_3')$ là phương án tối ưu của bài toán (P).

Vì các phép biến đổi để đưa bài toán QHTT tổng quát về bài toán QHTT chính tắc đều là phép biến đổi tương đương nên ta có kết luận sau.

❖ ***Kết luận***

- Mọi bài toán QHTT tổng quát đều có thể đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc.
- Bài toán tổng quát (P) có phương án khi và chỉ khi bài toán chính tắc $(\overline{P})$ có phương án.

- Bài toán tổng quát (P) có PATƯ khi và chỉ khi bài toán chính tắc ($\overline{P}$) có PATƯ.

Như vậy, ta chỉ cần giải bài toán QHTT dạng chính tắc.

2.3. Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn (còn gọi là dạng chính tắc khả giải)

2.3.1 Bài toán dạng chuẩn

Bài toán sau đây gọi là bài toán QHTT dạng chuẩn

Tìm $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho :

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min\ (\max)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad, i = 1, 2, ..., m$

(3) $x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n$

Trong đó hệ phương trình tuyến tính (2) là ***hệ phương trình chuẩn*** và các hệ số vế phải $\mathbf{b_i \geq 0}$, $i = \overline{1,m}$.

<u>Nhận xét</u>

- Bài toán QHTT dạng chuẩn là trường hợp đặc biệt của bài toán QHTT dạng chính tắc.
- Vì $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$ nên mỗi *nghiệm cơ bản* của hệ phương trình chuẩn (2) cũng thỏa (3).

2.3.2 Phương án cơ bản

- Mỗi ***nghiệm cơ bản*** của hệ phương trình chuẩn (2) gọi là một ***phương án cơ bản*** (PACB) hay ***phương án cực biên*** của bài toán QHTT dạng chuẩn. Nói cách khác, một phương án mà các ẩn không cơ bản đều bằng 0 gọi là ***phương án cơ bản.***
- Một PACB mà tất cả các ẩn cơ bản đều nhận giá trị dương gọi là PACB không suy biến ($b_i > 0,\ i = \overline{1,m}$). Ngược lại, một PACB mà có ít nhất một ẩn cơ bản nhận giá trị 0 gọi là PACB suy biến.
- Vì số nghiệm cơ bản của một hệ phương trình chuẩn là hữu hạn nên số PACB của một bài toán QHTT dạng chuẩn cũng hữu hạn.

<u>Ví du 5</u> Các bài toán QHTT sau đây có dạng chuẩn.

a) (1) $f(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min\ (\max)$

(2) $\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + 10x_4 - 2x_5 = 1 \\ \quad x_2 \quad\quad - 15x_4 + 3x_5 = 2 \\ \quad\quad x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 3 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

Phương án $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1;2;3;0;0)$ là PACB không suy biến.

b) (1) $f(x) = 2x_1+3x_2-3x_3+5x_4+x_5-x_6 \to \min (\max)$

$$(2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,6}$

Phương án $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0;0;4;0;2;3)$ là PACB không suy biến.

c) (1) $f(x) = 2x_1+8x_2+3x_3-5x_4+x_5+x_6 \to \min (\max)$

$$(2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,6}$

Phương án $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0; 0; 4; 0; 0; 3)$ là PACB suy biến.

d) (1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min (\max)$

$$(2)\begin{cases} x_1 \quad \cdots + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad \cdots + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ với } b_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., m$$

(3) $x_j \ge 0, j = 1, 2, ..., n$

Phương án $(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = (b_1, ..., b_m, 0, ..., 0)$ là PACB. Nếu $b_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ thì PACB này không suy biến; nếu $\exists b_i = 0$ thì PACB này suy biến.

❖ **<u>Chú ý</u>** *Mọi bài toán QHTT dạng chuẩn đều có thể đánh số lại các ẩn để được bài toán có dạng như trong ví dụ 5.d) này.*

2.3.3 Đưa bài toán QHTT dạng chính tắc về bài toán QHTT dạng chuẩn

Cho bài toán QHTT dạng chính tắc $(\overline{P})$:

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min (\max)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, 2, ..., m$

(3) $x_j \ge 0, j = 1, 2, ..., n$

Nếu $(\overline{P})$ chưa có dạng chuẩn thì ta có thể đưa $(\overline{P})$ về dạng chuẩn bằng các phép biến đổi sau:

- Trong các ràng buộc ở (2) của $(\overline{P})$, nếu ràng buộc nào có hệ số tự do ở vế phải âm thì ta đổi dấu hai vế để được $b_i > 0$.

- Đối với các ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ chưa có ẩn cơ bản thì ta cộng vào vế trái phương trình một ***ẩn giả*** $x_{n+k} \geq 0$ ($k = \overline{1,r}$ với r là số ràng buộc cần thêm ẩn giả). Trong hàm mục tiêu $f(x)\rightarrow$ min hệ số của các ***ẩn giả*** x_{n+k} là M (với M là số lớn tùy ý, lớn hơn bất kỳ hằng số nào cần so sánh với nó) ; trong hàm mục tiêu $f(x)\rightarrow$ max hệ số của các ***ẩn giả*** x_{n+k} là -M.

Bài toán mới có được này gọi là ***bài toán mở rộng***, ký hiệu là **(P_M).**

Ví dụ 6 Đưa bài toán sau đây về dạng chuẩn (bài toán ($\overline{P}$)):

(1) $f(x) = 2x_1 +3x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min(\max)$

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ \quad\; + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = -18 \\ \quad\; + 3x_2 + 8x_4 = 28 \end{cases}$$

(3) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$

Giải

Trước hết, ta đổi dấu hai vế của ràng buộc thứ hai. Ràng buộc thứ nhất đã có một ẩn cơ bản là x_1, nên ta chỉ cần thêm ***ẩn giả*** x_5 vào ràng buộc thứ hai và ***ẩn giả*** x_6 vào ràng buộc thứ ba. Ta được ***bài toán mở rộng*** (P_M) :

(1') $f_M(x_M) = 2x_1 +3x_2 + x_3 + x_4 \pm M(x_5 + x_6) \rightarrow \min(\max)$

$$(2')\quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ \quad\; - 4x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 18 \\ \quad\; + 3x_2 + 8x_4 + x_6 = 28 \end{cases}$$

(3') $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$

Ví dụ 7 Đưa bài toán sau đây về dạng chuẩn (bài toán ($\overline{P}$)):

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow \min(\max)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, với $b_i \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$)

(3) $x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n$

Giải

Cộng vào vế trái mỗi ràng buộc ở (2) một ẩn giả ta được ta được bài toán mở rộng

(P_M): (1') $f_M(x_M) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \pm M(x_{n+1} +...+x_{n+m}) \rightarrow \min(\max)$

(2') $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+k} = b_i$, với $b_i \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$)

(3') $x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, n+1,..., n+m.$

Nhận xét:

i) Nếu $x = (x_1,\ldots, x_n)$ là phương án của bài toán $(\overline{P})$ thì $x_M = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$ là phương án của bài toán mở rộng (P_M).

ii) Nếu $x_M^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*,0,\ldots,0)$ là PATƯ của bài toán mở rộng (P_M) thì $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ là PATƯ của bài toán $(\overline{P})$. Ngược lại, nếu $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ là PATƯ của bài toán $(\overline{P})$ thì $x_M^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*,0,\ldots,0)$ là PATƯ của bài toán mở rộng (P_M). Suy ra, nếu (P_M) không có PATƯ thì $(\overline{P})$ có cũng không có PATƯ.

iii) Nếu (P_M) có PATƯ $x_M^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*, x_{n+1}^*,\ldots,x_{n+m}^*)$, với ít nhất một ẩn giả $x_{n+k}^* > 0$ thì $(\overline{P})$ không có PA. Thật vậy, giả sử ngược lại $(\overline{P})$ có PA là $x = (x_1,\ldots, x_n)$. Khi đó (P_M) có PA là $x_M = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$; hơn nữa vì M lớn tùy ý và $x_{n+k}^* > 0$ nên $f_M(x_M) < f_M(x_M^*)$ đối với trường hợp $f\to$ min và $f_M(x_M) > f_M(x_M^*)$ đối với trường hợp $f\to$ max . Điều này vô lý với tính chất tối ưu của x_M^*.

❖ ***Kết luận***

- Bất kỳ bài toán QHTT dạng chính tắc nào cũng đưa được về bài toán QHTT dạng chuẩn.
- Nếu bài toán mở rộng (P_M) không có PATƯ thì bài toán $(\overline{P})$ không có PATƯ.
- Nếu bài toán mở rộng (P_M) có PATƯ và tất cả các ẩn giả đều bằng 0 thì bỏ phần ẩn giả ta được PATƯ của bài toán $(\overline{P})$.
- Nếu bài toán mở rộng (P_M) có PATƯ và ít nhất một ẩn giả khác 0 thì bài toán $(\overline{P})$ không có PA và do đó không có PATƯ.

Tóm lại*, mọi bài toán QHTT dạng tổng quát đều có thể đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc; mọi bài toán QHTT dạng chính tắc đều có thể đưa về bài toán QHTT dạng chuẩn. Như vậy, ta chỉ cần giải bài toán dạng chuẩn.*

2.4. Các tính chất bài toán QHTT

Ta đã biết, mọi bài toán QHTT tổng quát (P) đều có thể đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc $(\overline{P})$ tương ứng; và bài toán (P) có PATƯ khi và chỉ khi bài toán $(\overline{P})$ có PATƯ. Do đó, ta chỉ cần xét tính chất của bài toán QHTT dạng chính tắc. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết m ràng buộc độc lập tuyến tính và m < n. Nếu thêm giả thiết hệ phương trình ràng buộc có nghiệm thì ta có thể dùng phép khử Gauss-Jordan để biến đổi tương đương hệ đó về hệ phương trình chuẩn. Khi đó ta có các tính chất quan trọng sau đây của bài toán QHTT dạng chính tắc:

❖ ***Tính chất 1***: (sự tồn tại phương án)

Nếu bài toán có phương án thì có phương án cơ bản.

❖ ***Tính chất 2***: (sự tồn tại phương án tối ưu)

Nếu bài toán có phương án tối ưu thì có phương án cơ bản tối ưu.

❖ ***Tính chất 3***: (tính hữu hạn của số phương án)

Số phương án cơ bản khác nhau trong mỗi bài toán là hữu hạn.

....

Bài tập

Bài 1.19 Trong các bài toán từ 1 đến 6 dưới đây:

1. (1) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 32 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 32 \end{cases}$$

(3) $x_1, x_3 \le 0$; $x_2 \ge 0$; x_4, x_5 tùy ý

2. (1) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 17 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 20 \\ -2x_1 + 4x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0\ (j = \overline{1,6})$

3. (1) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 8 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4})$

4. (1) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 \ge 8 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4})$

5.

(1) $f(x) = -\ 2x_1 + x_2 + x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,4})$

6.

(1) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \ge -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,3})$

a) Những bài toán nào đã có dạng chính tắc?

b) Những bài toán nào có dạng chuẩn? Nếu bài toán có dạng chuẩn thì hãy chỉ ra các ẩn cơ bản và thứ tự của chúng? Hãy tìm phương án cơ bản ban đầu của nó.

c) Bài toán nào chưa có dạng chuẩn hãy đưa về dạng chuẩn sau đó cho biết ẩn nào là ẩn cơ bản, ẩn cơ bản ấy là ẩn gì (ẩn chính? ẩn phụ? ẩn giả?), thứ tự của nó thế nào? Phương án cơ bản ban đầu của bài toán dạng chuẩn này thế nào?

§ 3. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

3.1. Một số kết quả trong hình học

- Đường thẳng ax + by = c chia mặt phẳng Oxy ra thành hai miền: Một miền gồm tất cả các điểm (x,y) thỏa mãn bất phương trình ax + by > c; một miền gồm tất cả các điểm (x,y) thỏa mãn bất phương trình ax + by < c. Như vậy, mỗi bất phương trình dạng $ax + by \geq c$ (hoặc $ax + by \leq c$, với điều kiện $a^2+b^2 \neq 0$) xác định một nửa mặt phẳng kín.
- Họ đường thẳng ax + by = m ($m \in \mathbb{R}$) là tập hợp các đường thẳng song song với nhau, mà ta gọi là các đường mức (tương ứng với mức m). Nếu ta tịnh tiến một đường thẳng trong họ (một đường mức) theo hướng vectơ $\vec{n} = (a;b)$ thì giá trị tương ứng của m tăng, còn theo hướng ngược lại thì giá trị tương ứng của m giảm.

3.2. Các bước giải bài toán QHTT hai biến bằng phương pháp hình học

Giải bài toán : $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min$ (max) (1)

$$D: \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \begin{bmatrix} \leq \\ \geq \end{bmatrix} b_i, i = \overline{1,m} & (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ (hoặc } a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d) & (3) \end{cases}$$

Bước 1 Vẽ miền ràng buộc D trong mặt phẳng Ox_1x_2.

Bước 2 Xác định điểm $C(c_1,c_2)$; vẽ $\overrightarrow{OC}$ hoặc vectơ đơn vị $\vec{n}$ cùng chiều $\overrightarrow{OC} = (c_1,c_2)$; vẽ tùy ý một đường mức $(d) \perp \vec{n}$ và cắt miền phương án D.

Bước 3

- **Để tìm phương án tối ưu đối với bài toán f→ max** , ta tịnh tiến đường mức (d) theo **hướng véctơ** $\vec{n}$ đến khi việc tịnh tiến tiếp theo làm cho đường mức không còn điểm chung với D nữa thì dừng. Điểm thuộc D nằm trên đường mức cuối cùng này (đây là điểm tiếp xúc của (d) với D và có thể có nhiều điểm) là PATƯ và giá trị hàm mục tiêu tại điểm đó là giá trị tối ưu của bài toán.
- **Để tìm phương án tối ưu đối với bài toán f→ min** , ta tịnh tiến đường mức (d) theo **hướng ngược lại với véctơ** $\vec{n}$ đến khi việc tịnh tiến tiếp theo làm cho đường mức không còn điểm chung với D nữa thì dừng. Điểm thuộc D nằm trên đường mức cuối cùng này (đây là điểm tiếp xúc của (d) với D và có thể có nhiều điểm) là PATƯ và giá trị hàm mục tiêu tại điểm đó là giá trị tối ưu của bài toán.
- Nếu tịnh tiến (d) mãi mà không tìm được vị trí tiếp xúc của (d) với D thì kết luận bài toán không có PATƯ và hàm mục tiêu không bị chặn trên miền PA ($f \to -\infty$, đối với bài toán min; $f \to +\infty$, đối với bài toán max).

Ví dụ 1 Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp hình học.

$$f(x) = \mathbf{2}x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \ (\max)$$

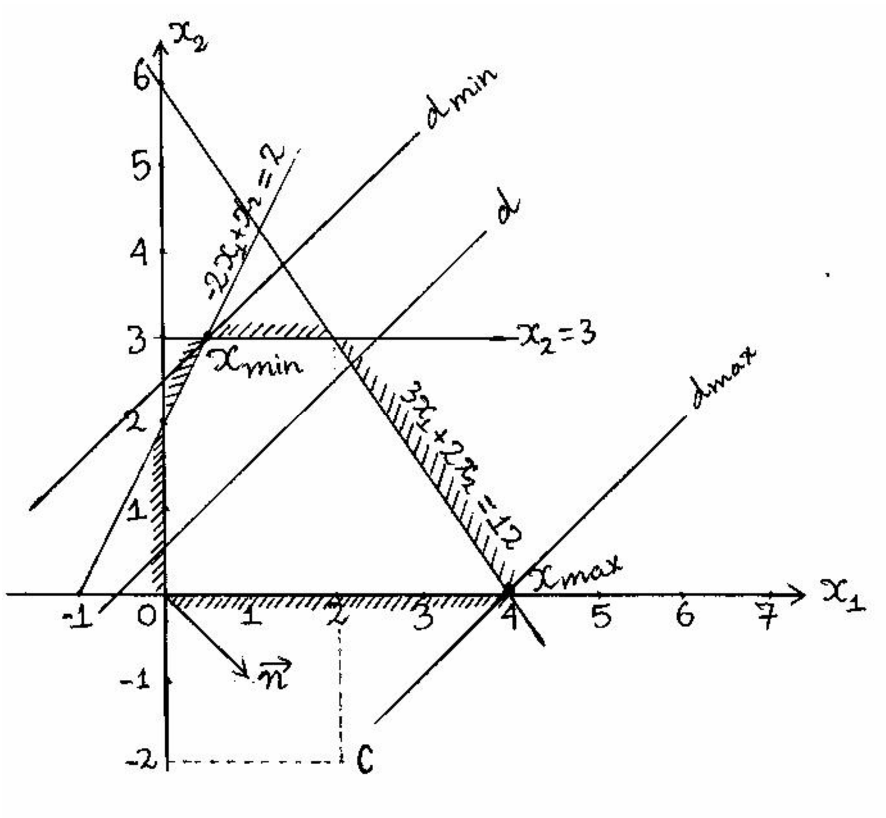
$$D: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ x_2 \le 3 \end{cases}$$

Giải

Miền phương án D, đường mức (d), điểm C và vectơ $\vec{n}$ được xác định như hình vẽ.

* Trường hợp f→ max: Tịnh tiến (d) theo hướng $\vec{n}$ ta được d_{max} và từ đó tính được $x_{max} = (4;0)$, $f_{max} = 8$.

* Trường hợp f→ min: Tịnh tiến (d) theo hướng ngược lại với $\vec{n}$ ta được d_{min} và từ đó tính được $x_{min} = (\frac{1}{2};3)$, $f_{min} = -5$.



Ví dụ 2 Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp hình học.

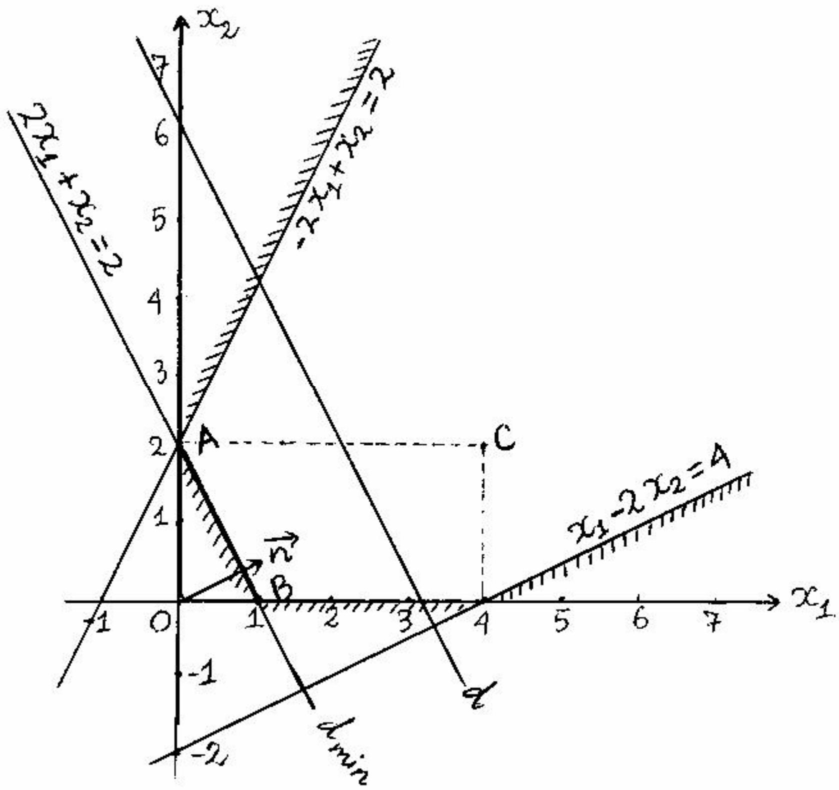
$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \ (\max)$$

$$D: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Giải

Miền phương án D, đường mức (d), điểm C và vectơ $\vec{n}$ được xác định như hình vẽ.

* *Trường hợp f→ min*: Tịnh tiến (d) theo hướng ngược lại với $\vec{n}$ ta được d_{min} và từ đó tính được x_{min} = (t; 2-2t) với $0 \le t \le 1$, f_{min} = 4. Tức là, PATƯ ứng với trường hợp f→ min là cả đoạn thẳng AB.
* *Trường hợp f→ max:* Tịnh tiến (d) theo hướng $\vec{n}$ ta thấy (d) và D không có điểm tiếp xúc. Tức là, hàm mục tiêu không bị chặn trên và bài toán không có phương án tối ưu.



Ví dụ 3 Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp hình học.

$$f(x) = 50x_1 - 50x_2 \to \min (\max)$$

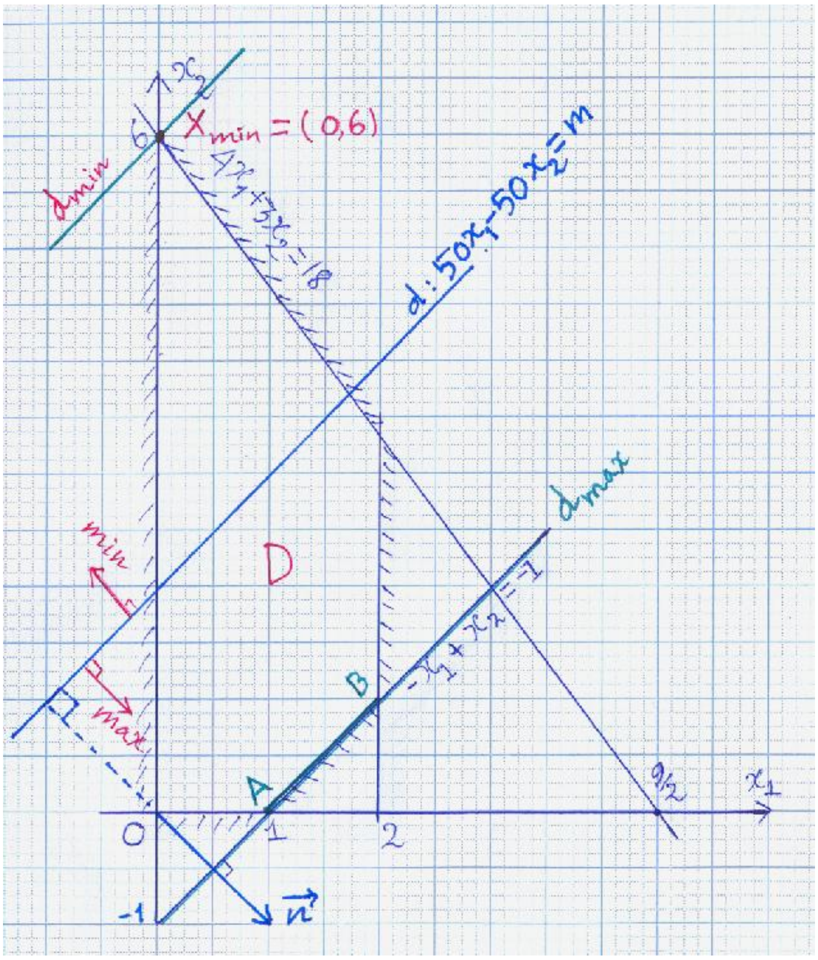
$$D: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ x_1 \le 2 \end{cases}$$

Giải

Miền phương án D, véc tơ $\vec{n} = (1;-1) /\!/ \overrightarrow{OC} = (50;-50)$, đường mức (d) như hình vẽ.

- *Trường hợp f→ min*: Tịnh tiến (d) theo hướng ngược lại với $\vec{n}$ ta được d_{min} và từ đó tính được $X_{\min} = (0;6)$, $f_{\min} = f(0,6) = -300$.

- *Trường hợp f→ max*: Tịnh tiến (d) theo hướng $\vec{n}$ ta được d_{max} và từ đó tính được $X_{\max}$ là tập hợp tất cả các điểm thuộc đoạn AB như hình vẽ. Tính được $X_{\max} = (1+t;t)$ với $0 \le t \le 1$ và $f_{\max} = f(1+t,t) = 50(1+t) - 50t = 50$.



Bài tập

Giải các bài tập toán QHTT sau đây bằng phương pháp hình học.

Bài 1.20 $f(x) = x_1 + x_2 \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

Bài 1.21 $f(x) = x_1 + 2x_2 \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 5x_2 \le 5 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 30 \end{cases}$$

Bài 1.22 $f(x) = -2x_1 + x_2 \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ 4x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0 \quad ; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Bài 1.23 $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \ ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Bài 1.24 $f(x) = -3x_1 + x_2 \to \min (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq -6 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \end{cases}$$

Bài 1.25

$$f(x) = 6x_1 - 12x_2 \to \min (\max)$$

$$D: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

Bài 1.26 [1] $f(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \min (\max)$

$$[2] \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 6 \end{cases}$$

[3] $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Bài 1.27 Giải bài toán kiểm soát ô nhiễm đã lập ở ví dụ 5 trong bài §1 .

(1) $f(x,y) = 1.400x + 1.800y \to \min$

$$(2) \begin{cases} x + y \leq 2.500.000 \\ 1{,}5x + 1{,}8y \geq 4.200.000 \end{cases}$$

(3) $x \geq 0, y \geq 0$

Bài 1.28 Một công ty đồ chơi sản xuất hai loại xe đồ chơi : loại trung bình và loại thượng hạng. Khi sản xuất, mỗi xe trung bình cần 2 giờ gia công và 2 giờ hoàn thiện, còn mỗi xe thượng hạng cần 2 giờ gia công và 4 giờ hoàn thiện. Công ty có 2 nhân công chuyên gia công và 3 nhân công chuyên hoàn thiện, mỗi nhân công làm việc 40 giờ mỗi tuần. Khi bán, công ty lãi 30.000đ mỗi xe trung bình và lãi 40.000đ mỗi xe thượng hạng. Giả sử mọi sản phẩm của công ty sản xuất ra đều được bán hết, hỏi mỗi tuần công ty nên sản xuất mỗi loại bao nhiêu xe để thu lời nhiều nhất.

§ 4. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN DẠNG CHUẨN

Đơn hình. Đơn hình một chiều là đoạn thẳng và điểm cực biên của nó là hai đầu đoạn thẳng. Đơn hình hai chiều là tam giác và điểm cực biên của nó các đỉnh của tam giác. Đơn hình ba chiều là tứ diện và điểm cực biên của nó các đỉnh của tứ diện. Tổng quát, trong không gian Euclide n chiều (n > 3), đơn hình n chiều là mở rộng của khái niệm tam giác và tứ diện; nói rõ hơn, đơn hình là hình có số đỉnh nhiều hơn 1 so với số chiều của không gian. Chính xác hơn, trong tất cả các đa diện của không gian Euclide n chiều thì đơn hình có số ít mặt n-1 chiều nhất. Như vậy, có thể nói đơn hình là đa diện đơn giản nhất.

Phương pháp đơn hình do nhà toán học Mỹ G.B. Dantzig đưa ra năm 1947. Ý tưởng cơ bản phương pháp này là tìm nghiệm tối ưu của đa diện các nghiệm bằng cách thử các đỉnh của đa diện, mà mỗi đỉnh của đa diện nghiệm ứng với một nghiệm cơ bản của hệ phương trình ràng buộc. Để việc thử không phải mò mẫm, người ta xây dựng thuật toán để đi từ một nghiệm tùy ý đến nghiệm tốt hơn, tức là đi dần tới nghiệm tối ưu.

4.1. Cơ sở toán học của phương pháp

Như trong bài § 2 ta đã biết, mọi bài toán dạng tổng quát đều có thể đưa về dạng chính tắc, mọi bài toán dạng chính tắc đều có thể đưa về dạng chuẩn. ***Do đó, ta chỉ cần quan tâm xây dựng thuật toán giải bài toán dạng chuẩn***. Ta có các tính chất sau:

- ***Tính chất 1*****:** Bài toán QHTT dạng chuẩn luôn có phương án cơ bản.
- ***Tính chất 2*** **:** Số phương án cơ bản của một bài toán QHTT dạng chuẩn là hữu hạn**.**
- ***Tính chất 3*****:** Nếu bài toán QHTT có PATƯ thì cũng có phương án cơ bản tối ưu.
- ***Tính chất 4*** **:** Điều kiện cần và đủ để bài toán QHTT có PATƯ là hàm mục tiêu bị chặn dưới đối với trường hợp f→ min, bị chặn trên đối với trường hợp f→max trên miền phương án (tính chất này cũng đúng đối với bài toán chính tắc nếu thêm điều kiện bài toán tồn tại phương án).

Khi giải bài toán QHTT, ta có thể đổi dấu hàm mục tiêu để biến trường hợp *min* về trường hợp *max* và ngược lại. Tuy nhiên, để dễ áp dụng, ở đây chúng tôi sẽ trình bày thuật toán cho cả hai trường hợp min và max.

Mọi bài toán QHTT dạng chuẩn đều có thể đánh số lại các ẩn để được bài toán có dạng chuẩn như sau:

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min (\max)$

$$(2)\begin{cases} x_1 \quad \cdots + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad \cdots + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \quad x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ với } b_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., m$$

(3) $x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., n$

Phương án cơ bản ban đầu là $x^o = (b_1, ..., b_m, 0, ..., 0)$ và $f(x^o) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$.

Với mỗi ẩn x_j ta tính các ước lượng: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$, $j = \overline{1,n}$. Vì các cột 1, 2,..., m của ma trận hệ số là các cột vectơ đơn vị ứng với các ẩn cơ bản nên $\Delta_i = 0$, $i = \overline{1,m}$.

4.1.1. Định lý 1 (tiêu chuẩn tối ưu)

i) **Trường hợp f→ min :** *Nếu $\Delta_j \le 0$, $\forall j \in \{1, 2,...., n\}$ thì phương án đang xét x^o tối ưu.*

ii) **Trường hợp f→ max :** *Nếu $\Delta_j \ge 0$, $\forall j \in \{1, 2,...., n\}$ thì phương án đang xét x^o tối ưu.*

Chứng minh

Xét một phương án bất kỳ $x = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$, ta có :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j \right) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \right) x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = f(x^o) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j .$$

❖ **Trường hợp f→ min :** Vì $\Delta_j \le 0$, $\forall j \in \{1, 2,..., n\}$ nên $f(x) = f(x^o) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \ge f(x^o)$.

Vậy x^o là PATƯ.

❖ **Trường hợp f→ max :** Vì $\Delta_j \ge 0$, $\forall j \in \{1,2,..., n\}$ nên $f(x) = f(x^o) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \le f(x^o)$.

Vậy x^o là PATƯ. ■

4.1.2. Định lý 2: (dấu hiệu bài toán không có PATƯ)

❖ **Trường hợp f→ min :** *Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \le 0$ ($i = \overline{1,m}$) thì bài toán không có phương án tối ưu.*

❖ **Trường hợp f→ max :** *Nếu tồn tại $\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \le 0$ ($i = \overline{1,m}$) thì bài toán không có phương án tối ưu.*

Chứng minh

❖ **Trường hợp f→ min :** Giả sử $\Delta_v > 0$ và $a_{iv} \le 0$ ($i = \overline{1,m}$). Do $x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j$ nên

với phương án x^k mà $x_j^k = \begin{cases} k & \text{với } k > 0 \text{ và } j = v \\ 0 & \text{với } j = \overline{m+1,n} \text{ và } j \ne v \end{cases}$, thì $x_i = b_i - a_{iv}k \ge 0$ ($i = \overline{1,m}$).

Khi đó $f(x^k) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{iv} k + c_v k = f(x^o) - \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{iv} - c_v\right) k = f(x^o) - \Delta_v k \to -\infty$

(khi $k \to +\infty$).

❖ **Trường hợp f→ max :** Giả sử $\Delta_v < 0$ và $a_{iv} \le 0$ ($i = \overline{1,m}$). Do $x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j$ nên

với phương án x^k mà $x_j^k = \begin{cases} k & \text{với } k > 0 \text{ và } j = v \\ 0 & \text{với } j = \overline{m+1,n} \text{ và } j \ne v \end{cases}$, thì $x_i = b_i - a_{iv}k \ge 0$($i = \overline{1,m}$). Khi

đó $f(x^k) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{iv} k + c_v k = f(x^o) - \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{iv} - c_v\right) k = f(x^o) - \Delta_v k \to +\infty$ (khi $k \to +\infty$)

Như vậy, hàm mục tiêu không bị chặn trên nên theo tính chất 4 bài toán không có PATƯ. ■

4.1.3. Định lý 3 (dấu hiệu bài toán có thể điều chỉnh để được PA tốt hơn)

Trường hợp f→ min: Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ và mọi $\Delta_j > 0$ đều tồn tại $a_{ij} > 0$ thì có thể điều chỉnh phương án để được phương án cơ bản mới tốt hơn. Hơn nữa, để hàm mục tiêu giảm nhanh thì ẩn đưa vào hệ ẩn cơ bản nên chọn ẩn ứng với $\Delta_j > 0$ lớn nhất.

Trường hợp f→ max: Nếu tồn tại $\Delta_j < 0$ và mọi $\Delta_j < 0$ đều tồn tại $a_{ij} > 0$ thì có thể điều chỉnh phương án để được phương án cơ bản mới tốt hơn. Hơn nữa, để hàm mục tiêu tăng nhanh thì ẩn đưa vào hệ ẩn cơ bản nên chọn ẩn ứng với $\Delta_j < 0$ nhỏ nhất.

<u>*Chứng minh*</u>

Ta chứng minh định lý cho trường hợp f→ min, trường hợp f→ max chứng minh tương tự. Mọi bài toán QHTT dạng chuẩn đều có thể đánh số lại các ẩn để được bài toán dạng chuẩn ở trang 36.

Giả sử phương án cơ bản $x^o = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ thỏa giả thiết của bài toán, $f(x^o) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$. Đặt $\Delta_v = \max_j \Delta_j$, $\lambda_r = \min\left\{\frac{b_i}{a_{iv}}, \text{với } a_{iv} > 0\right\} = \frac{b_r}{a_{rv}}$.

Xét vectơ $x(\lambda_r) = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_j = b_i - a_{iv}\dfrac{b_r}{a_{rv}}, & r \ne j = \overline{1,m} \\ x_j = 0, \; j = r \text{ hay } v \ne j = \overline{m+1,n} & \\ x_j = \dfrac{b_r}{a_{rv}}, & j = v \end{cases}$$

Rõ ràng $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$. Để chứng minh $x(\lambda_r)$ là phương án cơ bản tốt hơn x^o ta cần kiểm tra $x(\lambda_r)$ thỏahệ phương trình ràng buộc (2) và $f(x(\lambda_r)) < f(x^o)$.

- Với ràng buộc $i \neq r$: $x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i - a_{iv}\frac{b_r}{a_{rv}} + a_{iv}\frac{b_r}{a_{rv}} = b_i$
- Với ràng buộc $i = r$: $x_r + \sum_{j=m+1}^{n} a_{rj}x_j = a_{rv}\frac{b_r}{a_{rv}} = b_r$
- $f(x(\lambda_r)) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{r\neq i=1}^{m} c_i(b_i - a_{iv}\frac{b_r}{a_{rv}}) + c_v\frac{b_r}{a_{rv}}$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{r\neq i=1}^{m} \frac{c_i a_{iv} b_r}{a_{rv}} + c_v\frac{b_r}{a_{rv}} - c_r b_r$$

$$= f(x^o) - \frac{b_r}{a_{rv}}\sum_{r\neq i=1}^{m} c_i a_{iv} + c_v\frac{b_r}{a_{rv}} - c_r b_r\frac{a_{rv}}{a_{rv}}$$

$$= f(x^o) - \frac{b_r}{a_{rv}}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{iv} - c_v\right) = f(x^o) - \frac{b_r}{a_{rv}}\Delta_v$$

Suy ra, $f(x(\lambda_r)) < f(x^o)$ khi $\Delta_v > 0$ và nếu Δ_v càng lớn thì $f(x(\lambda_r))$ giảm càng nhanh. Như vậy, định lý đã được chứng minh. ■

Dựa vào các tính chất và các định lý trên, người ta xây dựng được thuật toán đơn hình sau đây.

4.2. Thuật toán đơn hình.

Bước 1 Lập bảng đơn hình ban đầu:

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	Phương án cơ bản	c_1 c_2 ....c_v ....c_n x_1 x_2 ....x_v ....x_n	λ_i
c_1^* c_2^* ⋮ c_r^* ⋮ c_m^*	x_1^* x_2^* ⋮ x_r^* ⋮ x_m^*	b_1 b_2 ⋮ b_r ⋮ b_m	a_{11} a_{12} ....a_{1v} ....a_{1n} a_{21} a_{22} ....a_{2v} ....a_{2n} ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ a_{r1} a_{r2} ....a_{rv} ....a_{rn} ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ a_{m1} a_{m2} ... .a_{mv} ....a_{mn}	λ_1 λ_2 λ_r λ_m
	$f(x)$	$= f_o$	Δ_1 Δ_2.............................. Δ_v .... Δ_n	

Trong đó :

- ♦ x_i^* là ẩn cơ bản thứ i , $i \in \{1, 2,..., m\}$.
- ♦ c_i^* là hệ số của ẩn cơ bản x_i^* trong hàm mục tiêu, $i \in \{1, 2,..., m\}$.
- ♦ $f_o = \sum_{i=1}^{m} c_i^* b_i = \langle C^*, B \rangle$, $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i^* a_{ij} - c_j$ (nếu cột j là cột ứng với ACB thì $\Delta_j = 0$)

Bước 2 Kiểm tra tính tối ưu:

Bài toán min	**Bài toán max**
a) Nếu $\Delta_j \le 0\ \forall j$ thì phương án đang xét là tối ưu và giá trị hàm mục tiêu tương ứng là giá trị tối ưu. b) Nếu $\exists \Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \le 0\ (i = \overline{1,m})$, thì bài toán không có phương án tối ưu.	a) Nếu $\Delta_j \ge 0\ \forall j$ thì phương án đang xét là tối ưu và giá trị hàm mục tiêu tương ứng là giá trị tối ưu. b) Nếu $\exists \Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \le 0\ (i = \overline{1,m})$, thì bài toán không có phương án tối ưu.

Nếu cả hai trường hợp (a) và (b) không xảy ra thì sang bước 3.

Bước 3 Tìm ẩn để đưa vào

Bài toán min	**Bài toán max**
Nếu $\Delta_v = \max\limits_j \Delta_j$ thì x_v được chọn để đưa vào.	Nếu $\Delta_v = \min\limits_j \Delta_j$ thì x_v được chọn để đưa vào.

Bước 4 Tìm ẩn để đưa ra: Tính $\lambda_i = \dfrac{b_i}{a_{iv}}$, với các $a_{iv} > 0$

Nếu $\lambda_r = \min\limits_i \lambda_i$ thì x_r^* được chọn để đưa ra. Phần tử a_{rv} gọi là phần tử trục xoay.

Bước 5 Biến đổi bảng đơn hình:

- Trên cột hệ số ta thay c_r^* bằng c_v ; trên cột hệ ẩn cơ bản ta thay x_r^* bằng x_v.
- Biến cột v thành vectơ đơn vị (phương pháp khử Gauss-Jordan dựa vào phần tử trục xoay a_{rv}).
  - ✓ $h_i - \dfrac{a_{iv}}{a_{rv}} h_r \to h_i$, với $i \ne r$.
  - ✓ Chia hàng r cho phần tử trục xoay a_{rv}.
- Hàng cuối cùng cách tính như bước 1. *Trở lại bước 2.*

❖ ***Lưu ý*** Sau khi tìm được một PATƯ, muốn biết PATƯ này có duy nhất hay không hoặc muốn tìm PATƯ mới thì ta làm như sau:

i) Trong bảng đơn hình cuối cùng, nếu mọi ẩn không cơ bản x_j đều có ước lượng $\Delta_j \ne 0$ thì PATƯ hiện có duy nhất.

ii) Trong bảng đơn hình cuối cùng, nếu tồn tại ẩn không cơ bản x_v nào đó có ước lượng $\Delta_v = 0$ thì PATƯ hiện có không duy nhất. Khi đó, muốn tìm một PATƯ mới ta biến đổi bảng đơn hình bằng cách đưa ẩn x_v vào, còn ẩn đưa ra và cách biến đổi giống như bước 4 và bước 5.

Ví dụ 1 Giải bài toán : (1) $f(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 \qquad + 4x_3 = 7 \\ \qquad x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$

Giải

Đây là bài toán QHTT dạng chuẩn với hệ ẩn cơ bản tương ứng là (x_1, x_2). Lập bảng đơn hình rồi tính toán theo các bước của thuật toán ta được.

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	2	-1	2	λ_i
			x_1	x_2	x_3	
2	x_1	7	1	0	4	7/4(min)
-1	x_2	10	0	1	1	10
Bảng 1	f(x) = 4		0	0	5	
2	x_3	7/4	1/4	0	1	
-1	x_2	33/4	-1/4	1	0	
Bảng 2	f(x) = -19/4		-5/4	0	0	

Bài toán này có hàm mục tiêu min và $\Delta_j \le 0$, $\forall_j = \overline{1,3}$ nên PA đang xét tối ưu. Vậy PATƯ $x^* = (x_1, x_2, x_3) = (0; 33/4;7/4)$, $f_{min} = -19/4$. Hơn nữa, ở *bảng 2* ẩn không cơ bản duy nhất là x_1 có $\Delta_1 = -5/4 \ne 0$ nên PATƯ x^* =(0; 33/4;7/4) là duy nhất.

Ví dụ 2 Giải bài toán

(1) $f(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} \quad\; x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 \quad\;\; = 5 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,3}$

Giải

Đây là bài toán QHTT dạng chuẩn với hệ ẩn cơ bản tương ứng là (x_3, x_1). Lập bảng đơn hình rồi tính toán theo các bước của thuật toán ta được.

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	4	1	-2	λ_i
			x_1	x_2	x_3	
-2	x_3	8	0	1	1	8
4	x_1	5	1	-1	0	
Bảng 1	f(x) = 4		0	-7	0	
1	x_2	8	0	1	1	
4	x_1	13	1	0	1	
Bảng 2	f(x) = 60		0	0	7	

Bài toán này có hàm mục tiêu max và $\Delta_j \ge 0$, $\forall_j = \overline{1,3}$ nên PACB đang có tối ưu. Vậy PATƯ $x^* = (x_1, x_2, x_3) = (13; 8; 0)$, $f_{max} = 60$. Hơn nữa, ở *bảng 2* ẩn không cơ bản duy nhất là x_3 có $\Delta_3 = 7 \ne 0$ nên PATƯ này duy nhất.

Ví dụ 3 Giải bài toán QHTT

(1) $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$

Giải

Trước hết, ta đưa bài toán về dạng chuẩn.

(1') $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min$

(2') $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 10 \end{cases}$

(3') $x_j \ge 0, j = \overline{1,5}$

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	1	-2	1	0	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	1	2	1	1	0	6
0	x_5	10	2	1	-1	0	1	10
Bảng 1	f(x) = 0		-1	2	-1	0	0	
-2	x_2	6	1/2	1	1/2	1/2	0	
0	x_5	4	3/2	0	-3/2	-1/2	1	
Bảng2	f(x) = -12		-2	0	-2	-1	0	

Bài toán này có hàm mục tiêu min và $\Delta_j \le 0, \forall_j = \overline{1,5}$ nên PACB hiện có tối ưu. Vậy PATƯ $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 0, 0, 4)$ và $f_{min} = -12$. Hơn nữa, ở *bảng 2* các ẩn không cơ bản x_1, x_3, x_4 có các ước lượng $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4$ đều âm nên PATƯ x^* là duy nhất. Vì x_4, x_5 là ẩn phụ nên bỏ ẩn phụ x_4, x_5, ta được PATƯ của bài toán ban đầu là $x^* = (x_1, x_2, x_3) = (0, 6, 0)$ và $f_{min} = -12$.

_Ví dụ 4_ (trường hợp bài toán không có phương án tối ưu)

Giải bài toán : (1) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 5 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$

Giải

Đưa bài toán về dạng chính tắc

(1') $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$

(2') $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 5 \end{cases}$

(3') $x_j \ge 0, j = \overline{1,5}$

Biến đổi tương đương (2') ta được : (2') $\Leftrightarrow \begin{cases} \quad 5x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \quad - x_5 = 5 \end{cases}$

Đây là hệ phương trình chuẩn với hệ ẩn cơ bản là (x_4, x_1) và các hệ số tự do ở vế phải đều dương nên bài toán QHTT tương ứng có dạng chuẩn.

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	1	2	-1	0	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	15	0	5	4	1	-1	
1	x_1	5	1	3	1	0	-1	
Bảng 1	f(x) = 5		0	1	2	0	-1	

Bài toán này có hàm mục tiêu max và $\Delta_5 = -1 < 0$, $a_{15} = a_{25} = -1 < 0$ nên bài toán không có PATƯ.

Ví dụ 5 Giải bài toán (trường hợp phương án tối ưu không duy nhất)

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 3x_6 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 152 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 60 \\ 3x_1 + x_3 \quad x_6 = 36 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$

Giải

Bài toán có dạng chuẩn, lập bảng đơn hình để giải như sau:

Hệ số	Hệ ACB	PA CB	5 x_1	4 x_2	5 x_3	2 x_4	1 x_5	3 x_6	λ_i
2	x_4	152	2	4	3	1	0	0	76
1	x_5	60	4	2	3	0	1	0	15
3	x_6	36	3	0	1	0	0	1	12
Bảng 1	f(x) = 472		12	6	7	0	0	0	
2	x_4	128	0	4	7/3	1	0	-2/3	32
1	x_5	12	0	2	5/3	0	1	-4/3	6
5	x_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3	
Bảng 2	f(x) = 328		0	6	3	0	0	-4	
2	x_4	104	0	0	-1	1	-2	2	52
4	x_2	6	0	1	5/6	0	1/2	-2/3	
5	x_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3	36
Bảng 3	f(x) = 292		0	0	-2	0	-3	0	

Bài toán này có hàm mục tiêu min và $\Delta_j \leq 0$, $\forall_j = \overline{1,6}$ nên PACB hiện có tối ưu. Vậy PATƯ $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (12, 6, 0, 104, 0, 0)$ và $f_{min} = 292$. Hơn nữa, trong *bảng 3* ẩn không cơ bản x_6 có ước lượng $\Delta_6 = 0$ nên PATƯ x^* không duy nhất. Tiếp tục biến đổi bảng đơn hình đưa ẩn x_6 vào ẩn x_1 ra ta được.

2 4 3	x_4 x_2 x_6	32 30 36	-6 2 3	0 1 0	-3 3/2 1	1 0 0	-2 1/2 0	0 0 1	
Bảng 4	$f(x) = 292$		0	0	-2	0	-3	0	

Trong bảng 4, $\Delta_j \le 0$, $\forall_j = \overline{1,6}$ nên PACB hiện có tối ưu. Vậy ta có một phương án tối ưu mới là $x^{**} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 30, 0, 32, 0, 36)$ và $f_{min} = 292$.

❖ Lưu ý (hiện tượng xoay vòng)

Có trường hợp, sau một số phép biến đổi bảng đơn hình ta gặp lại PA cũ và hàm mục tiêu cũng không đổi, trường hợp này gọi là hiện tượng xoay vòng. Tuy nhiên, trường hợp này rất hiếm gặp trong thực tế nên không trình bày cách giải trong tài liệu này.

Bài tập

Bài 1.29

a) Giải bài toán

(1) $f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,6}$ ĐS: PATƯ $x^* = (0; 8; 0; 3; 0; 1)$, $f_{min} = -17$.

b) Giải bài toán

(1) $f(x) = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7 \\ -4x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,6}$ ĐS: Bài toán không có PATƯ

Bài 1.30 Giải bài toán

(1) $f(x) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$

$$(2)\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,6}$ ĐS: PATƯ $x^* = (5, 4, 0, 0, 11, 0)$, $f_{max} = 11$

Bài 1.31 Giải bài toán

(4) $f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 \to \min$

$$(5)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 152 \\ 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 = 60 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 36 \end{cases}$$

(6) $x_j \ge 0, j = \overline{1,6}$ ĐS: PATƯ $x^* = (104, 12, 6, 0, 0, 0)$, $f_{min} = 292$

Bài 1.32 Giải bài toán

[1] $f(x) = 180x_1 + 120x_2 + 60x_3 \rightarrow \max$

[2] $\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 2x_3 \le 200 \\ 20x_1 + 40x_2 + x_3 \le 500 \\ 25x_1 + 20x_2 + 3x_3 \le 250 \end{cases}$

[3] $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Bài 1.33 Giải bài toán

(1) $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 18 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$

ĐS: PATƯ $x^* = (0, 0, 3)$, $f_{max} = 15$

Bài 1.34 Giải bài toán

(1) $f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,4}$)

Bài 1.35 Giải bài toán

(1) $f(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,3}$)

Bài 1.36 Giải bài toán

(1) $f(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,3}$)

Bài 1.37 Giải bài toán

(1) $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,3}$)

Bài 1.38 Giải bài toán

(1) $f(x) = x_4 + x_5 + 20 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,5})$

Bài 1.39 Giải bài toán

(1) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 5 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,4})$

Bài 1.40 Một công ty có kế hoạch sản xuất 3 loại sản phẩm S_1, S_2, S_3 từ 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3. Định mức tiêu hao về nguyên liệu cho 1 đơn vị sản phẩm mỗi loại, lợi nhuận thu được cho 1 đơn vị sản phẩm và số lượng nguyên liệu tối đa huy động được cho ở bảng sau :

SP / NVL	Định mức tiêu hao các loại nguyên liệu cho 1 đơn vị sản phẩm mỗi loại			Số NVL tối đa huy động được
	S_1	S_2	S_3	
N_1	2	3	2	240
N_2	1	2	1	200
N_3	4	1	2	400
Lợi nhuận /1 đ.vị SP (100.000 đồng)	10	12	9	

Hãy lập kế hoạch sản xuất để thu lợi nhuận tối đa biết rằng sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết. Tính lượng nguyên liệu còn thừa sau khi sản xuất và số tiền lời tối đa.

§5. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN MỞ RỘNG

Để giải bài toán QHTT (P) ta đưa nó về dạng chính tắc ($\overline{P}$). Nếu bài toán ($\overline{P}$) có dạng chính tắc nhưng chưa phải dạng chuẩn, ta dùng ẩn giả để đưa về dạng chuẩn (P_M) (xem lại bài §2 mục 2.3) rồi giải bài toán dạng chuẩn. Khi đó, chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- ***Trường hợp 1*:** Nếu bài toán mở rộng (P_M) không có PATƯ thì bài toán (P) không có PATƯ.
- ***Trường hợp 2*:** Nếu bài toán mở rộng (P_M) có PATƯ và tất cả các ẩn giả đều bằng 0 thì bỏ phần ẩn giả và ẩn phụ ta được PATƯ của bài toán (P).
- ***Trường hợp 3*:** Nếu bài toán mở rộng (P_M) có PATƯ và ít nhất một ẩn giả nhận giá trị dương thì bài toán (P) không có PATƯ.

❖ ***Chú ý***

i) Mục đích của việc thêm vào các ẩn giả là làm cho bài toán (P_M) có dạng chuẩn. Vì thế, nếu bài toán xuất phát đã có sẵn một số ẩn cơ bản thì chỉ cần thêm ẩn giả vào các ràng buộc chưa có ẩn cơ bản, từ đó có ngay phương án cơ bản xuất phát.

ii) Khi giải bài toán mở rộng, mỗi khi một ẩn giả được đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản thì sẽ không được đưa trở lại, vì thế không cần chú ý đến các cột ứng với các ẩn giả, và do đó trên bảng đơn hình có thể không cần ghi các cột ứng với ẩn giả.

Ví dụ 1 Giải bài toán (P): *(trường hợp 1- đây là bài toán ở §4 ví dụ 4)*

(1) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 5 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3})$

Giải

Đưa bài toán (P) về dạng chính tắc ($\overline{P}$):

(1') $\overline{f}(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$

(2') $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 5 \end{cases}$

(3') $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}$

Bài toán ($\overline{P}$) này chưa có dạng chuẩn nên ta đưa nó về dạng chuẩn. Ràng buộc thứ nhất đã có x_4 là ẩn cơ bản nên ta chỉ cần thêm ẩn giả x_6 vào ràng buộc thứ hai. Khi đó ta được bài toán mở rộng (P_M):

$$(1'')\, f_M(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 \to \max$$

$$(2'')\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$(3'')\, x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}$$

Trong đó M là số dương lớn tùy ý, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh với nó. Lập bảng đơn hình để giải:

Hệ số	Hệ ACB	PACB	1	2	-1	0	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	10	-1	2	3	1	0	5
-M	x_6	5	1	3	1	0	-1	5/3
Bảng 1	$f_M(x) = -5M$		-M-1	-3M-2	-M+1	0	M	
0	x_4	20/3	-5/3	0	7/3	1	2/3	10
2	x_2	5/3	1/3	1	1/3	0	-1/3	
Bảng 2	$f_M(x) = 10/3$		-1/3	0	5/3	0	-2/3	
0	x_5	10	-5/2	0	7/2	3/2	1	
2	x_2	5	-1/2	1	3/2	1/2	0	
Bảng 3	$f_M(x) = 10$		-2	0	4	1	0	

Bài toán (P_M) có hàm mục tiêu max và $\Delta_1 = -2 < 0$, $a_{11} = -5/2 < 0$, $a_{21} = -1/2 < 0$ nên bài toán không có PATƯ. Suy ra bài toán ($\overline{P}$) không có PATƯ và do đó bài toán (P) cũng không có PATƯ.

❖ *Lưu ý* Có thể đưa bài toán dạng tổng quát (P) về dạng mở rộng (P_M) mà không cần thông qua dạng chính tắc ($\overline{P}$).

Ví dụ2 Giải bài toán (P): *(trường hợp 2)*

$$(1)\ f(x) = 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 \to \min$$

$$(2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 10 \end{cases}$$

$$(3)\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc, nhưng không phải dạng chuẩn. Ta lập bài toán mở rộng (P_M) tương ứng như sau:

(1') $f_M(x) = 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 + M(x_6 + x_7) \rightarrow \min$

$$(2')\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_7 = 10 \end{cases}$$

(3') $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,7}$

Trong đó M là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh với nó.

Hệ số	Hệ ACB	PA CB	6	8	9	5	6	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
M	x_6	6	2	1	3	2	1	3
M	x_7	10	1	2	1	2	3	5
Bảng 1	f(x) = 16M		3M-6	3M-8	4M-9	4M-5	4M-6	
5	x_4	3	1	1/2	3/2	1	1/2	6
M	x_7	4	-1	1	-2	0	2	2
Bảng 2	f(x)= 4M+15		-M-1	$M-\frac{11}{2}$	$-2M-\frac{3}{2}$	0	2M-7/2	
5	x_4	2	5/4	1/4	2	1	0	
6	x_5	2	-1/2	1/2	-1	0	1	
Bảng 3	f(x) = 22		$-\frac{11}{4}$	$-\frac{15}{4}$	-5	0	0	

Vì M là số rất lớn nên $\Delta_j \leq 0\ \forall\ j = \overline{1,7}$. PACB đang có (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,x_7) = (0, 0, 0, 2, 2, 0, 0) là tối ưu. Do các ẩn giả $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ nên PATƯ bài toán (P) là (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0, 2,2) và $f_{min} = 22$.

Ví dụ 3 Giải bài toán (P): *(trường hợp 2)*

(1) $f(x) = 6x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min$

$$(2)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,3}$

Giải

Đưa bài toán (P) về dạng chuẩn: Thêm vào ràng buộc thứ nhất ẩn phụ x_4 ta được ẩn cơ bản thứ nhất nên ta chỉ cần thêm ẩn giả x_5, x_6 vào ràng buộc thứ hai và thứ ba. Khi đó ta được bài toán mở rộng (P_M):

(1') $f_M(x) = 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + M(x_5 + x_6) \rightarrow \min$

$$(2')\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 8 \end{cases}$$

(3') $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,6}$

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	6	3	1	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_4	10	2	5	1	1	5
M	x_5	16	4	-3	2	0	4
M	x_6	8	2	4	1	0	4
Bảng 1	$f_M(x) = 24M$		6M-6	M-3	3M-1	0	
0	x_4	2	0	1	0	1	
M	x_5	0	0	-11	0	0	
6	x_1	4	1	2	1/2	0	8
Bảng 2	$f_M(x) = 24$		0	-11M-9	2	0	
0	x_4	2	0	1	0	1	
M	x_5	0	0	-11	0	0	
1	x_3	8	2	4	1	0	
Bảng 3	$f_M(x) = 8$		-4	-11M+1	0	0	

Trong bảng 3, vì M là số dương lớn nên $\Delta_j \leq 0\ \forall\ j = \overline{1,6}$. PACB hiện có $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 8, 2, 0, 0)$ tối ưu. Trong hệ ẩn cơ bản chỉ còn ẩn giả x_5 nhưng $x_5 = 0$ nên bài toán (P) có PATƯ là $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,8)$ và $f_{min} = 8$.

Ví dụ 4 Giải bài toán P: *(trường hợp 3)*

(1) $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$

$$(2)\ \begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 23 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0\ (j = \overline{1,5})$

Giải

Đưa bài toán về dạng chuẩn ta được bài toán mở rộng (P_M):

(1') $f_M(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(x_6 + x_7) \rightarrow \min$

$$(2')\quad \begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_7 = 23 \end{cases}$$

(3') $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1,7})$

Hệ số	Hệ ACB	PA CB	2	1	-1	0	0	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
M	x_6	12	-4	-1	2	-1	0	6
0	x_5	10	-2	2	-1	0	1	
M	x_7	23	1	-2	-1/2	0	0	
Bảng 1	f(x) = 35M		-3M-2	-3M-1	3/2M+1	-M	0	
-1	x_3	6	-2	-1/2	1	-1/2	0	
0	x_5	16	-4	3/2	0	-1/2	1	
M	x_7	26	0	-9/4	0	-1/4	0	
Bảng 2	f(x) = 35M		0	-9/4M-1/2	0	-1/4M+1/2	0	

Trong bảng 2, $\Delta_j \leq 0$ $\forall j$ nên bài toán mở rộng có phương án tối ưu. Vì PATƯ của bài toán mở rộng có ẩn giả $x_7 = 26 > 0$ nên bài toán xuất phát (P) không có phương án.

Bài tập

Bài 1.41 Giải bài toán

(1) $f(x) = 12x_1 + 8x_2 + x_3 \to \min$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$

ĐS: PATƯ $x^* = (0, 7/5, 12/5, 0)$, $f_{min} = 68/5$

Bài 1.42 Giải bài toán

(1) $f(x) = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 \quad 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1,3})$

Bài 1.43 Giải bài toán

(1) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,3}$)

Bài 1.44 Giải bài toán

(1) $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

(2) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,4}$)

Bài 1.45 Giải bài toán

(1) $f(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 9x_4 \to \max$

(2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 9 \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 14 \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$)

Bài 1.46 Giải bài toán

(1) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 31 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

(3) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Bài 1.47 Giải bài toán

(1) $f(x) = x_1 + 8x_2 - 3x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 14 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 9 \end{cases}$

(3) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0$

§ 6. QUY HOẠCH NGUYÊN

Quy hoạch nguyên (integer programming , viết tắc IP) là bài toán quy hoạch trong đó có tất cả hoặc một phần các biến bị ràng buộc chỉ nhận giá trị nguyên. Tức là bài toán có dạng tìm $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho :

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\ (\max)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{bmatrix} \le b_i \\ \ge b_i \\ = b_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, ..., m$

(3) $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, ..., n$; x_j nguyên với $j \in \mathbf{J} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$.

- Nếu $\mathbf{J} = \{1, 2, ..., n\}$ thì bài toán gọi là *quy hoạch nguyên hoàn toàn* (pure integer programming), ký hiệu (PIP).
- Nếu $\mathbf{J} \subsetneqq \{1, 2, ..., n\}$ thì bài toán gọi là *quy hoạch nguyên bộ phận* (mixed integer programming), ký hiệu (MIP).

Nếu bài toán quy hoạch nguyên có miền ràng buộc bị chặn thì có thể giải bài toán bằng cách duyệt tất cả các phương án. Tuy nhiên, nếu số phương án này khá lớn thì trong thực tế cũng không thể thực được, mặc dù có sự hỗ trợ của máy tính. Trong lịch sử, việc thưởng 2^{64} hạt thóc cho người nghĩ ra môn cờ không thể thực hiện là một minh họa rất hay cho việc này.

Hiện nay, phương pháp hiệu quả nhất để giải bài toán quy hoạch nguyên là ***phương pháp nhánh-cận***. Chúng ta cùng tìm hiểu phương pháp này thông qua một số ví dụ sau đây. Vì bạn đọc đã biết cách giải bài toán QHTT ở các bài trước, nên để cho gọn, chúng tôi không trình bày chi tiết việc giải các bài toán QHTT tương ứng trong các ví dụ này.

Ví dụ 1 Xét bài toán quy hoạch nguyên hoàn toàn (PIP) sau đây .

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ và x_1 , x_2 nguyên.

Giải

Gọi x^* , $f_{N\text{-}max}$ lần lượt là PATƯ và giá trị tối ưu của bài toán (PIP) (nếu có).

- ***Giải bài toán QHTT tương ứng*:** Bỏ qua điều kiện nguyên của các biến ta được bài toán QHTT (LP0).

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Giải bài toán (LP0) ta được PATƯ là $x^0 = (x_1 ; x_2) = (3,75; 1,25)$, $f_o = 23,75$. Do $f_o = 23,75$ nên $f_{N\text{-}max} \le 23$. PATƯ x^0 này có $x_1 = 3,75$, $x_2 = 1,25$ không nguyên nên có thể chọn một trong hai ẩn này để *phân nhánh*.

❖ ***Phân nhánh***: Chọn ẩn x_1 để phân nhánh ta được (có thể chọn x_2)

♦ Với nhánh $x_1 \le 3$ ta được bài toán (LP1):

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

❖ ***Giải bài toán*** (LP1) ta được PATƯ $(x_1;x_2) = (3;2)$, $f_1 = 23$. PATƯ này có các ẩn đều nguyên nên $x^* := (3;2)$ và $f_{N\text{-}max} := 23$, *nhánh này dừng*.(stop)

♦ Với nhánh $x_1 \ge 4$ ta được bài toán (LP2):

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\ x_1 \ge 4 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

❖ ***Giải bài toán*** (LP2) ta được PATƯ là $(x_1;x_2) = (4; 0,833)$, $f_2 = 23,333$.

Đến đây, rõ ràng trong trong (LP2) không thể có PA nguyên của bài toán (IP) tốt hơn so với (LP1). Tuy nhiên, nếu muốn tìm xem trong (LP2) còn có nghiệm nguyên nào khác của bài toán (PIP) hay không thì ta tiếp tục phân nhánh (LP2) để giải như sau.

♦ Với nhánh $x_2 \le 0$ ta được bài toán (LP21):

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\ x_1 \ge 4, x_2 \le 0 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

❖ ***Giải bài toán*** (LP21) này ta được PATƯ $(x_1;x_2) = (4,5;0)$, $f_{21} = 22,5$. Vì $f_{21} = 22,5 < 23 = f_{N\text{-}max}$ nên trong nhánh này không thể có phương án nào tốt hơn x^*.

♦ Với nhánh $x_2 \ge 1$ ta được bài toán (LP22):

(1) $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

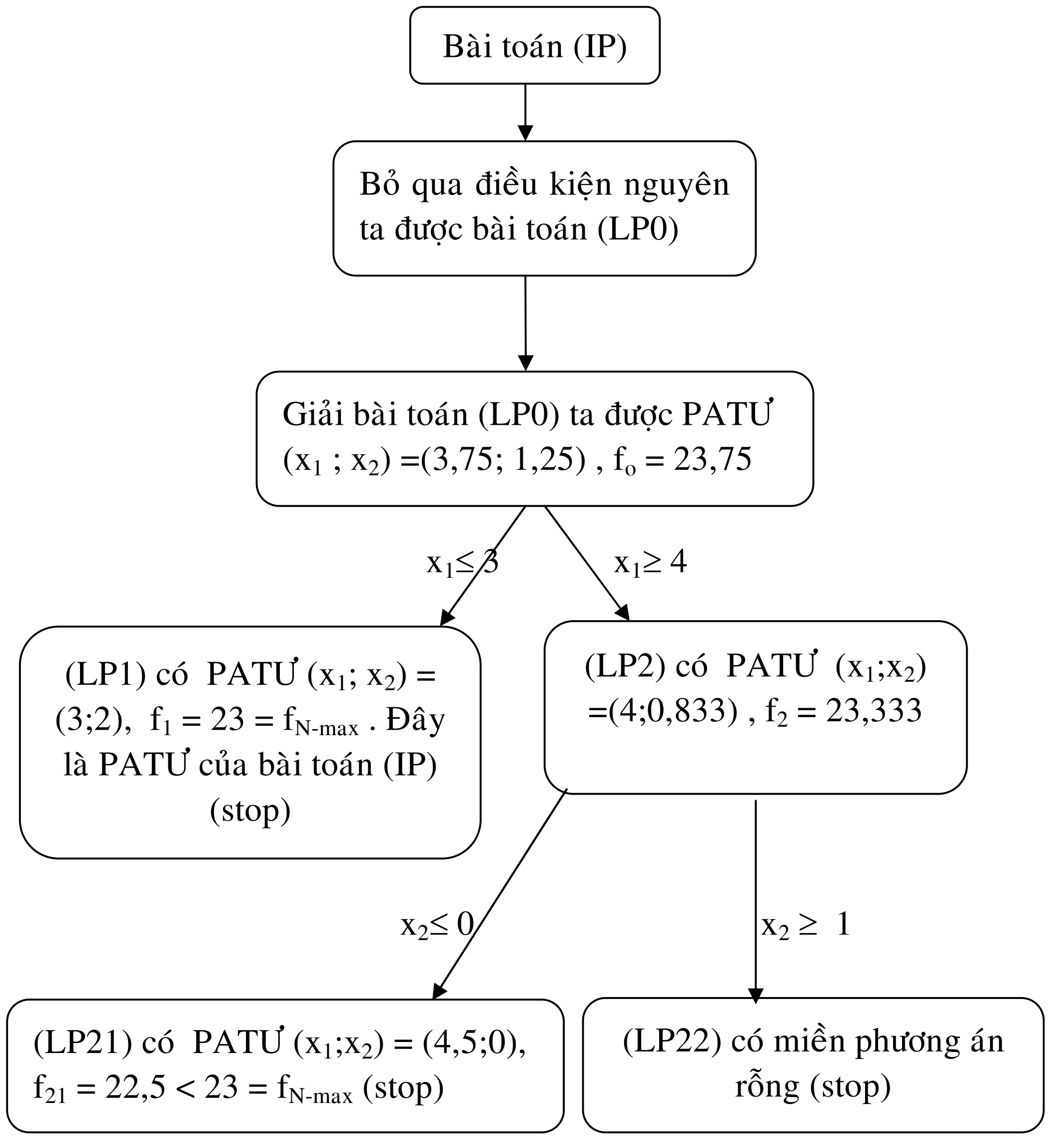
(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \text{ (hệ này vô nghiệm)} \\ x_1 \ge 4, x_2 \ge 1 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

❖ Bài toán (LP22) có tập phương án rỗng.

Vậy phương án tối ưu của bài toán (PIP) là $x^* := (3;2)$ và $f_{N\text{-}max} := 23$.

Ta tóm tắt các bước giải bài toán (IP) qua sơ đồ sau:



Ví dụ 2 Giải bài toán quy hoạch nguyên bộ phận (MIP) sau đây bằng phương pháp nhánh cận.

(1) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$

$$(2)\quad \begin{cases} 3x_1 & & +4x_3 & \le 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \le 7 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \le 12 \end{cases}$$

(3) $x_1 , x_2, x_3 \ge 0$ và x_1 , x_3 nguyên

Giải

Gọi x^*, f_{N-max} lần lượt là PATƯ và giá trị tối ưu của bài toán (MIP) (nếu có).

❖ ***Giải bài toán QHTT tương ứng*:** Bỏ qua điều kiện nguyên của các biến ta được bài toán QHTT (LP0).

(1) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 3x_1 & & +4x_3 & \le 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \le 7 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \le 12 \end{cases}$

(3) $x_1 , x_2, x_3 \ge 0$

Giải bài toán (LP0) ta được PATƯ là $x^0 = (x_1 ; x_2,;x_3) =(0; 2,375; 2,5)$, $f_o = 19,375$. PATƯ x^0 này có $x_3= 2,5$ không nguyên nên lấy ẩn này để phân nhánh.

❖ ***Phân nhánh***: Lấy ẩn x_3 để phân nhánh ta được

♦ Với nhánh $x_3 \le 2$ ta được bài toán (LP1):

(1) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 3x_1 & & +4x_3 & \le 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \le 7 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \le 12 \\ & & x_3 \le 2 & \end{cases}$

(3) $x_1 , x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP1) ta được PATƯ $(x_1; x_2; x_3) =(2/3;2;2)$, $f_1 = 18,667$.

♦ Với nhánh $x_3 \ge 3$ ta được bài toán (LP2):

(1) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 3x_1 & & +4x_3 & \le 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \le 7 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \le 12 \\ & & x_3 \ge 3 & \end{cases}$

(3) $x_1 , x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Bài toán*** (LP2) có miền phương án rỗng. (stop)
(vì $x_3 \ge 3$ nên $3x_1 +4x_3 \le 10$ không thỏa)

Trong nhánh (LP1) tiếp tục lấy x_1 để phân nhánh.

♦ Với nhánh $x_1 \le 0$ ta được bài toán (LP11):

(1) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 3x_1 & & +4x_3 & \le 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \le 7 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \le 12 \\ & x_3 \le 2, & x_1 \le 0 & \end{cases}$

(3) $x_1 , x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP11) ta được PATƯ $(x_1; x_2; x_3) =(0;2,5;2)$, $f_{11} = 18,5$. PATƯ này thỏa x_1 và x_3 nguyên nên $x^* :=(0;2,5;2)$, $f_{N\text{-}max} := 18,5$, nhưng còn phải so sánh với nhánh (LP12).

♦ Với nhánh $x_1 \ge 1$ ta được bài toán (LP2):

(1) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

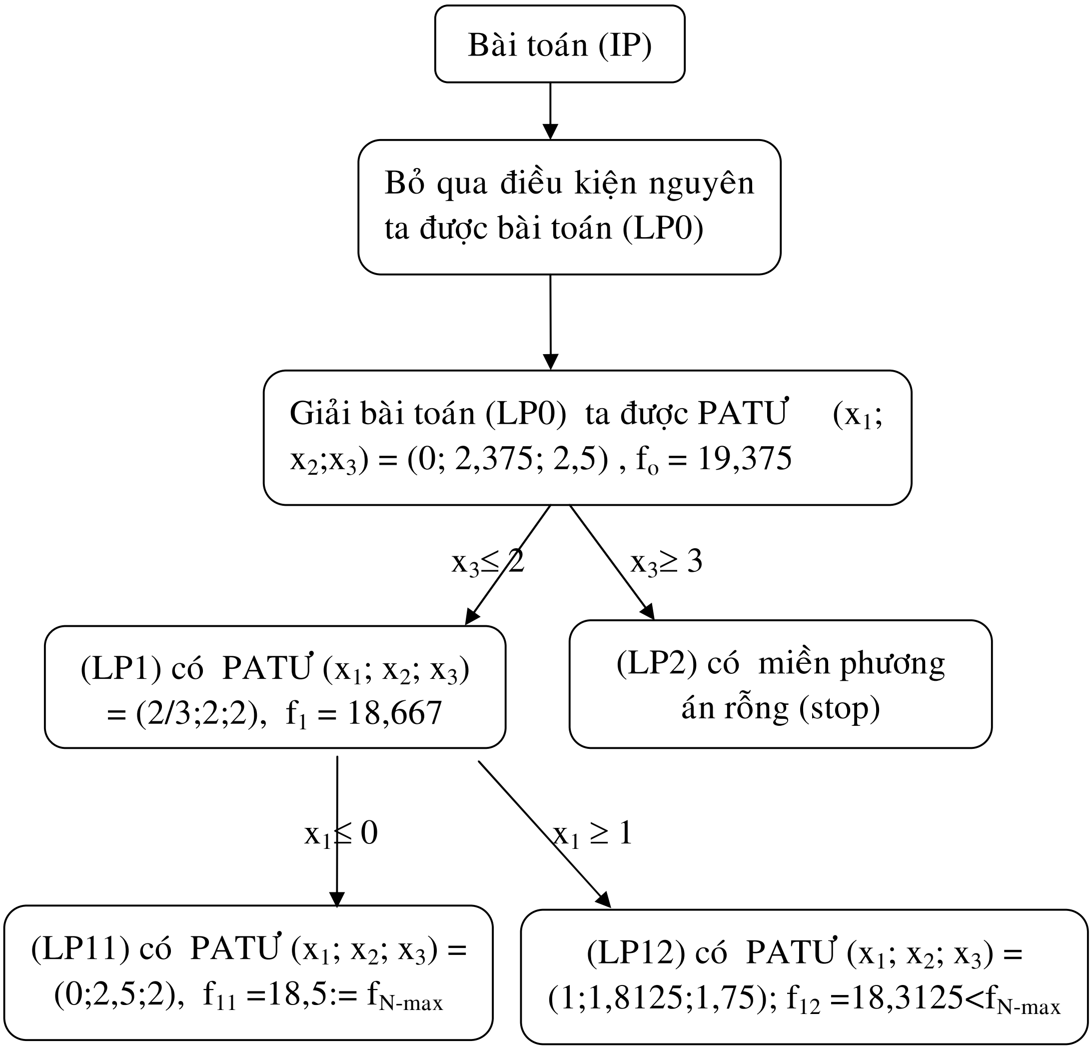
(2) $\begin{cases} 3x_1 & & +4x_3 & \le 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \le 7 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \le 12 \\ & x_3 \le 2, & x_1 \ge 1 & \end{cases}$

(3) $x_1 , x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP12) ta được PATƯ $(x_1;x_2; x_3) =(1;1,8125;1,75)$, $f_{12} = 18,3125 < 18,5=f_{N\text{-}max}$. Do đó nhánh này không thể có phương án nguyên tốt hơn nhánh (LP11) (stop)

Vậy PATƯ của bài toán (MIP) là $x^* = (0;2,5;2)$, $f_{N\text{-}max} := 18,5$.

Ta tóm tắt các bước giải bài toán (MIP) qua sơ đồ sau:



Ví dụ 3 Giải bài toán quy hoạch nguyên hoàn toàn (PIP) sau đây bằng phương pháp nhánh cận.

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max$

$$(2)\quad \begin{cases} 4x_1 \quad - 3x_2 \qquad\qquad \le 2 \\ -3x_1 \quad + 2x_2 \quad + x_3 \quad \le 3 \\ 2x_1 \quad - x_2 \quad - x_3 \quad \le 4 \end{cases}$$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ và x_1, x_2, x_3 nguyên

Giải

Gọi x^*, $f_{N\text{-max}}$ lần lượt là PATƯ và giá trị tối ưu của bài toán (PIP) (nếu có).

❖ ***Giải bài toán QHTT tương ứng*:** Bỏ qua điều kiện nguyên của các biến ta được bài toán QHTT (LP0).

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 4x_1 & -3x_2 & & \le 2 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 3 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \le 4 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Giải bài toán (LP0) ta được PATƯ là $x^0 = (x_1 ; x_2;x_3) =(1/2; 0;9/2)$, $f_o = 14$. Do $f_o = 14$ nên $f_{N\text{-}max} < 14$. PATƯ x^0 này có $x_1= 1/2$, $x_3 = 9/2$ không nguyên nên có thể chọn một trong hai ẩn này để phân nhánh.

❖ ***Phân nhánh***: Chọn ẩn x_3 để phân nhánh ta được

♦ Với nhánh $x_3 \le 4$ ta được bài toán (LP1):

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 4x_1 & -3x_2 & & \le 2 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 3 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \le 4 \\ & & x_3 \le & 4 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP1) ta được PATƯ $(x_1; x_2; x_3) =(1/2;0;4)$, $f_1 = 25/2$. Nhánh này có thể có PA nguyên tốt hơn x^* đã có được ở (LP2) nên ta *tiếp tục* lấy x_1 để phân nhánh.

♦ Với nhánh $x_3 \ge 5$ ta được bài toán (LP2):

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 4x_1 & -3x_2 & & \le 2 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 3 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \le 4 \\ & & x_3 \ge & 5 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP2) ta được PATƯ là $(x_1 ; x_2; x_3) =(2; 2;5)$, $f_2 = 11$. PATƯ này có các ẩn đều nguyên nên $x^* :=(2; 2; 5)$ và $f_{N\text{-}max}:= 11$, *nên nhánh này dừng*.(stop)

❖ ***Phân nhánh***: Trong (LP1), lấy ẩn x_1 để phân nhánh ta được

♦ Với nhánh $x_1 \le 0$ ta được bài toán (LP11):

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 4x_1 & -3x_2 & & \le 2 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 3 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \le 4 \\ & x_3 \le 4 & & \\ & x_1 \le 0 & & \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP11) ta được PATƯ $(x_1; x_2; x_3) =(0;0;9/2)$, $f_{11} = 9$. Vì $f_{11} = 9 < f_{N\text{-}max}= 11$ nên mọi PA nguyên ở nhánh này đều không thể tốt hơn x^*. (Stop)

♦ Với nhánh $x_1 \ge 1$ ta được bài toán (LP12):

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

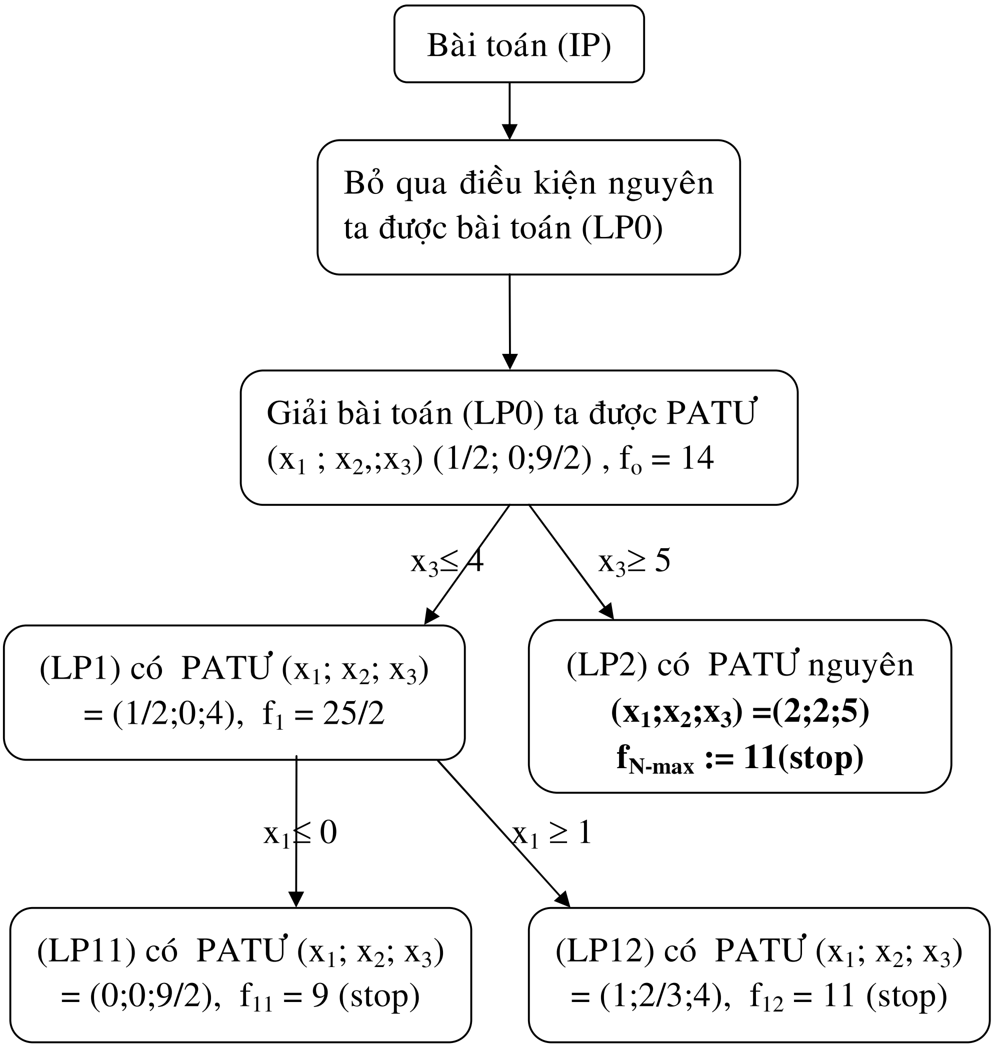
(2) $\begin{cases} 4x_1 & -3x_2 & & \le 2 \\ -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 3 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \le 4 \\ & x_3 \le 4 & & \\ & x_1 \ge 1 & & \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP12) ta được PATƯ là $(x_1; x_2; x_3) =(1;2/3;4)$, $f_{12} = 11$. Vì $f_{12} = 11 = f_{N\text{-}max}$ nên mọi PA nguyên ở nhánh này đều không thể tốt hơn x^*. (stop)

Vậy phương án tối ưu bài toán (PIP) là $x^* =(2; 2; 5)$ và $f_{N\text{-}max}= 11$.

Ta tóm tắt các bước giải bài toán (MIP) qua sơ đồ sau:



Ví dụ 4 Giải bài toán quy hoạch nguyên bộ phận (MIP) sau đây bằng phương pháp nhánh cận.

(1) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

(3) $x_1 , x_2, x_3, x_4 \ge 0$ và x_1 , x_2 nguyên

Giải

Gọi x^*, $f_{N\text{-}min}$ lần lượt là PATƯ và giá trị tối ưu của bài toán (MIP) (nếu có).

❖ ***Giải bài toán QHTT tương ứng*:** Bỏ qua điều kiện nguyên của các biến ta được bài toán QHTT (LP0).

(1) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_4 & \le 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & -x_3 + x_4 & \ge 5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 + 2x_4 & = 6 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Giải bài toán (LP0) ta được PATƯ là $x^0 = (x_1; x_2,;x_3,x_4) = (2,6; 1; 0;0,2)$, $f_o = 1,8$. Do đó $f_{N\text{-}min} \ge 1,8$. PATƯ x^0 này có $x_1 = 2,6$ không nguyên nên lấy ẩn này để phân nhánh.

❖ ***Phân nhánh***: Chọn ẩn x_1 để phân nhánh ta được

♦ Với nhánh $x_1 \le 2$ ta được bài toán (LP1):

(1) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_4 & \le 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & -x_3 + x_4 & \ge 5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 + 2x_4 & = 6 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$, $x_1 \le 2$

❖ ***Giải bài toán*** (LP1) ta được PATƯ $(2; 0,4; 0,8; 1)$, $f_1 = 1,8$. PATƯ này còn có ẩn không nguyên $x_2 = 0,4$ nên tiếp tục phân nhánh.

♦ Với nhánh $x_1 \ge 3$ ta được bài toán (LP2):

(1) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_4 & \le 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & -x_3 + x_4 & \ge 5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 + 2x_4 & = 6 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$, $x_1 \ge 3$

❖ ***Giải bài toán*** (LP2) ta được kết quả bài toán không có phương án (miền ràng buộc rỗng), *nhánh này dừng*.(stop) .

❖ ***Phân nhánh***: Lấy ẩn x_2 để phân nhánh ta được

♦ Với nhánh $x_2 \le 0$ ta được bài toán (LP11):

(1) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_4 & \le 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & -x_3 + x_4 & \ge 5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 + 2x_4 & = 6 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$, $x_1 \le 2$, $x_2 \le 0$

❖ ***Giải bài toán*** (LP11) ta được PATƯ $(1; 0; 1/3; 7/3) := x^*$, $f_{11} = 3$. PATƯ này có các ẩn x_1, x_2 đều nguyên, *nhánh này dừng*.(stop).

♦ Với nhánh $x_2 \ge 1$ ta được bài toán (LP12):

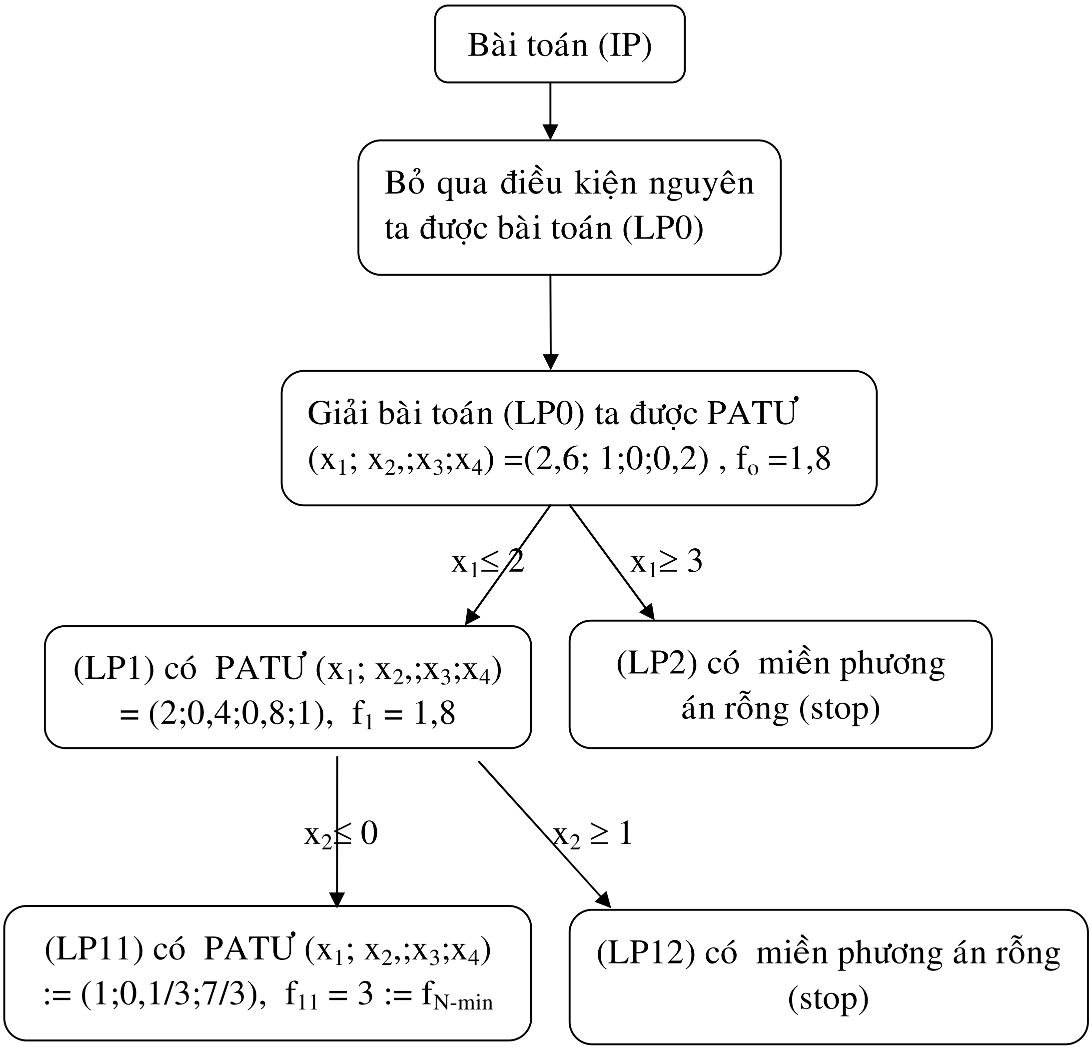
(1) $f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_4 & \le 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & -x_3 + x_4 & \ge 5 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 + 2x_4 & = 6 \end{cases}$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$, $x_1 \ge 3$, $x_2 \ge 1$

❖ ***Giải bài toán*** (LP12) ta được kết quả bài toán không có phương án, *nhánh này dừng*.(stop).

Ta tóm tắt các bước giải bài toán (MIP) qua sơ đồ sau:



Bài tập tổng kết chương 1
Câu hỏi trắc nghiệm (chọn 1 trong các câu A, B, C, D)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây là sai?

A) Bất kỳ bài toán QHTT nào cũng có thể xem như là bài toán QHTT dạng tổng quát.

B) Nếu một bài toán QHTT dạng chính tắc có hệ phương trình ràng buộc là hệ phương trình chuẩn thì bài toán đó có dạng chuẩn .

C) Mọi bài toán QHTT dạng chuẩn đều có phương án .

D) Mọi bài toán QHTT dạng chuẩn đều co dạng chính tắc.

Câu 2 Cho bài toán QHTT với hàm mục tiêu $f \to \min$ và có miền phương án là tập $D \neq \emptyset$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Nếu hàm mục tiêu *bị chặn trên* trên miền D thì bài toán có PATƯ.

B) Nếu miền D bị chặn (giới nội) thì bài tóan có PATƯ.

C) Nếu hàm mục tiêu *bị chặn dưới* trên miền D thì bài toán có PATƯ.

D) Nếu hàm mục tiêu bị chặn trên miền D thì bài toán có PATƯ.

Câu 3 Cho bài toán QHTT với hàm mục tiêu $f \to \max$ và có miền phương án là tập $D \neq \emptyset$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Nếu hàm mục tiêu *bị chặn dưới* trên miền D thì bài toán có PATƯ.

B) Nếu miền D bị chặn (giới nội) thì bài tóan có PATƯ.

C) Nếu hàm mục tiêu *bị chặn trên* trên miền D thì bài toán có PATƯ.

D) Cả b và c đều đúng.

Câu 4 Khẳng định nào sau đây đúng ?

A) Mọi bài QHTT dạng chuẩn đều có phương án.

B) Mọi bài toán qui hoạch dạng chính tắc đều có phương án.

C) Nếu một bài toán QHTT có phương án thì sẽ có PATƯ.

D) Nếu một bài toán QHTT có PATƯ thì tập phương án bị chặn.

Câu 5 Giả sử bài toán QHTT *chính tắc* (P) được đưa về bài toán mở rộng (P_M). Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Nếu (P_M) có PATƯ thì (P) có PATƯ.

B) Nếu (P) có PATƯ thì (P_M) có PATƯ.

C) Nếu (P_M) có PATƯ mà mọi ẩn giả đều nhận giá trị 0 thì (P) có PATƯ.

D) Nếu (P_M) có PATƯ mà mọi ẩn giả đều bằng 0 thì bỏ phần ẩn giả ta được PATƯ của (P).

Câu 6 Giả sử bài toán QHTT dạng tổng quát (P) được đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc $(\overline{P})$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bài toán (P) có phương án khi và chỉ khi $(\overline{P})$ có phương án .

B) Bài toán (P) có PATƯ khi và chỉ khi $(\overline{P})$ có PATƯ.

C) Cả A và B đều đúng.
D) Cả A và B đều sai.

Câu 7 Giả sử bài toán QHTT tổng quát (P) được đưa về bài toán QHTT dạng mở rộng(P_M) . Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Nếu (P) có PATƯ thì (P_M) có PATƯ.
B) Nếu (P) có phương án thì (P_M) có phương án.
C) Nếu (P_M) có PATƯ thì bỏ phần ẩn phụ và ẩn giả ta được PATƯ của (P).
D) Nếu (P_M)không có PATƯ thì (P) không có PATƯ.

Câu 8 Giả sử bài toán QHTTdạng tổng quát (P) được đưa về bài toán QHTT dạng mở rộng (P_M).Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu (P) không có PATƯ thì (P_M)không có PATƯ.
B) Nếu (P_M) không có PATƯ thì (P)không có PATƯ.
C) Nếu (P_M) có PATƯ mà có ít nhất một ẩn giả nhận giá trị dương thì (P) không có PATƯ.
D) Bài toán(P_M) luôn có phương án.

BÀI TOÁN QUY HOẠCH PHÂN TUYẾN TÍNH

Bài 1 Giải bài toán (P)

$$(1)\quad f(x) = \frac{3x_1 + x_2 + 2x_3}{x_1 + 3x_2 + 2x_3} \to \min$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 9 \end{cases}$$

$$(3)\quad x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$$

Giải

Đặt $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + 3x_2 + 2x_3}$; $y_j = y_0 x_j$ với $j = \overline{1,3}$ (*).

Khi đó bài toán tương đương với bài toán (P'):

$$(1)\quad g(y) = 3y_1 + y_2 + 2y_3 \to \min$$

$$(2)\quad \begin{cases} -8y_0 + y_1 + 2y_2 + y_3 \le 0 \\ -9y_0 + 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 0 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3)\quad y_i \ge 0\ , i = \overline{1,3}, y_o > 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn

$$(1)\quad g_M(y) = 3y_1 + y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 0y_5 + My_6 \to \min$$

$$(2)\quad \begin{cases} -8y_0 + y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ -9y_0 + 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \\ \qquad\qquad y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_6 = 1 \end{cases}$$

$$(3)\quad y_j \ge 0\ , j = \overline{1,6}\ , y_0 > 0$$

Lập bảng đơn hình để giải ta được

Hệ số	Hệ ACB	PA CB	0	3	1	2	0	0	M	λ_i
			y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	0	-8	1	2	1	1	0	0	0
0	y_5	0	-9	2	3	2	0	1	0	0
M	y_6	1	0	1	3	2	0	0	1	1/3
Bảng 1	$g_M(y)$ =M		0	M-3	3M-1	2M-2	0	0	0	
1	y_2	0	-4	1/2	1	1/2	1/2	0	0	
0	y_5	0	3	1/2	0	1/2	-3/2	1	0	0
M	y_6	1	12	-1/2	0	1/2	-3/2	0	1	1/12
Bảng 2	$g_M(y)$ =M		12M-4	$\frac{-M}{2}-\frac{5}{2}$	0	$\frac{M}{2}-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}M+\frac{1}{2}$	0	0	
1	y_2	0	0	7/6	1	7/6	-3/2	4/3	0	
0	y_0	0	1	1/6	0	1/6	-1/2	1/3	0	
M	y_6	1	0	-5/2	0	-3/2	9/2	-4	1	2/9
Bảng 3	$g_M(y)$ =M		0	$\frac{-5}{2}M-\frac{11}{6}$	0	$-\frac{3}{2}M-\frac{5}{6}$	$\frac{9}{2}M-\frac{3}{2}$	$-4M+\frac{4}{3}$	0	
1	y_2	1/3	0	1/3	1	2/3	0	0	1/3	
0	y_0	1/9	1	-1/9	0	0	0	-1/9	1/9	
0	y_4	2/9	0	-5/9	0	-1/3	1	-8/9	2/9	
Bảng 4	$g_M(y)=\frac{1}{3}$		0	-8/3	0	-4/3	0	0	$\frac{1}{3}$-M	

$\Delta_j \le 0 \ \ \forall\, j = \overline{0,6}$ nên PACB hiện có là tối ưu .

Vậy PATƯ bài toán (P') là $y(*) = (y_0, y_1, y_2, y_3) = (\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{3}, 0)$, $g_{min} = \frac{1}{3}$

Thay vào (*) ta được PATƯ bài toán (P) : $x^* = (0; 3; 0)$, $f_{min} = \frac{1}{3}$

<u>Bài 2</u> (bài toán qui hoạch phân tuyến tính)

Một công ty sử dụng 2 loại nguyên liệu N1, N2 để sản xuất ra 1 loại sản phẩm theo 2 công nghệ khác nhau là CN1, CN2. Biết lượng nguyên liệu mỗi loại hiện có; định mức tiêu hao các loại nguyên liệu, chi phí sản xuất, lượng sản phẩm làm ra trong một giờ được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có (đv)	Định mức tiêu hao nguyên liệu trong 1 giờ	
		CN1	CN2
N1	300	3	2
N2	400	2	4
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		7	8
Chi phí (USD/giờ)		120	150

a) Hãy lập mô hình toán học bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho giá thành sản phẩm là thấp nhất.

b) Đưa bài toán đã lập ở ***câu a*** về bài toán quy hoạch tuyến tính.

c) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính ở câu b rồi suy ra kết quả bài toán ở câu a.

<u>Bài 3</u> Để sản xuất 4 loại sản phẩm S_1, S_2, S_3, S_4 người ta dùng 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3. Định mức tiêu hao về nguyên vật liệu cho 1 đơn vị sản phẩm mỗi loại, lợi nhuận thu được cho 1 đơn vị sản phẩm và số lượng nguyên liệu tối đa huy động được cho ở bảng sau :

SP / NVL	S_1	S_2	S_3	S_4	Số NVL tối đa huy động
N_1	4	2	2	3	34
N_2	1	1	2	3	29
N_3	3	1	2	1	39
Lợi nhuận cho 1 đ.vị SP	9	10	14	12	

Hãy lập kế hoạch sản xuất để thu lợi nhuận tối đa.

<u>Bài 4</u> Một người có 10.000.000.000đ muốn cho vay theo các loại hình sau :

- Tiết kiệm không kỳ hạn, với lãi suất 6,5%.
- Tiết kiệm có kỳ hạn với lãi suất 8,5%.
- Mua tín phiếu với lãi suất 10%.
- Cho tư nhân vay với lãi suất 13%.

Thời gian đáo hạn cho là như nhau . các loại hình đầu tư đều có may rủi . Để giảm thiểu các sự rủi ro, người cho vay theo các chỉ dẫn sau :

a) Không cho tư nhân vay quá 20% số vốn.

b) Số lượng cho vay trong tín phiếu không được quá số cho vay trong 3 lĩnh vực cho vay kia .

c) Ít nhất 30% số tiền cho vay phải thuộc lĩnh vưc tiết kiệm có kỳ hạn và tín phiếu.

d) Tỷ lệ tiền tiết kiệm không kỳ hạn trên tiền tiết kiệm có kỳ hạn không được quá 1/3.

Người này muốn vay toàn bộ số tiền . Cho biết kế hoạch đầu tư sao cho lợi nhuận tối đa?

Bài 5 Một nhà máy chuyên sản xuất hai loại phụ tùng P_1 và P_2, các phụ tùng này được gia công lần lượt trong hai phân xưởng A_1 và A_2. Thời gian tiêu thụ cho việc sản xuất trong các phân xưởng được trình bày trong bảng sau :

Phân xưởng / Phụ tùng	A_1	A_2
P_1	10	16
P_2	14	12
Thời gian được sử dụng / tuần	1600	1800

(đơn vị : giờ)

Diện tích kho sử dụng là 1400 m^2. Các sản phẩm không được để chồng lên nhau , mỗi sản phẩm P_1 cần $5m^2$, mỗi sản phẩm P_2 cần $4m^2$. Mỗi tuần có thể bán ra 140 sản phẩm P_1 và 135 sản phẩm P_2.

Sản phẩm bán ra cho mức lời 120 USD đối với P_1 và 100 USD đối với P_2.

Hỏi : Mỗi tuần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm P_1 và P_2 để nhà máy có mức lời tối đa ?

Bài 6 Một công ty sử dụng 3 loại nguyên liệu N1, N2, N3 để sản xuất ra 3 loại sản phẩm SP1, SP2, SP3. Biết lợi nhuận của mỗi đơn vị sản phẩm, số lượng nguyên liệu hiện có; định mức tiêu hao các loại nguyên liệu và lượng sản phẩm làm ra trong một giờ được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có (đv)	Định mức tiêu hao nguyên liệu trong 1 giờ		
		SP1	SP2	SP3
N1	300	3	2	4
N2	400	2	4	1
N3	500	4	3	5
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		9	10	8
Lợi nhuận(đồng/1 sản phẩm)		4000	3500	4500

Hãy lập mô hình toán học bài toán tìm kế hoạch sản xuất sao cho lợi nhuận cao nhất và giải bài toán **.**

Bài 7 Một nhà máy chuyên sản xuất hai loại sản phẩm S_1 , S_2 và các sản phẩm này được gia công lần lượt trong hai phân xưởng A_1 và A_2. Thời gian (đơn vị tính : giờ) cần sử dụng cho việc sản xuất ra mỗi đơn vị sản phẩm trong các phân xưởng được cho trong bảng sau :

Phân xưởng / Sản phẩm	A_1	A_2
S_1	12	18
S_2	15	10
Thời gian được sử dụng tối đa trong 1 tuần	140	120

Giả sử các sản phẩm sản xuất ra đều có thể bán hết với lợi nhuận là 110 USD đối với mỗi sản phẩm S_1 và 150 USD đối với mỗi sản phẩm S_2. Hỏi mỗi tuần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm S_1 và bao nhiêu sản phẩm S_2 để nhà máy có lợi nhuận lớn nhất?

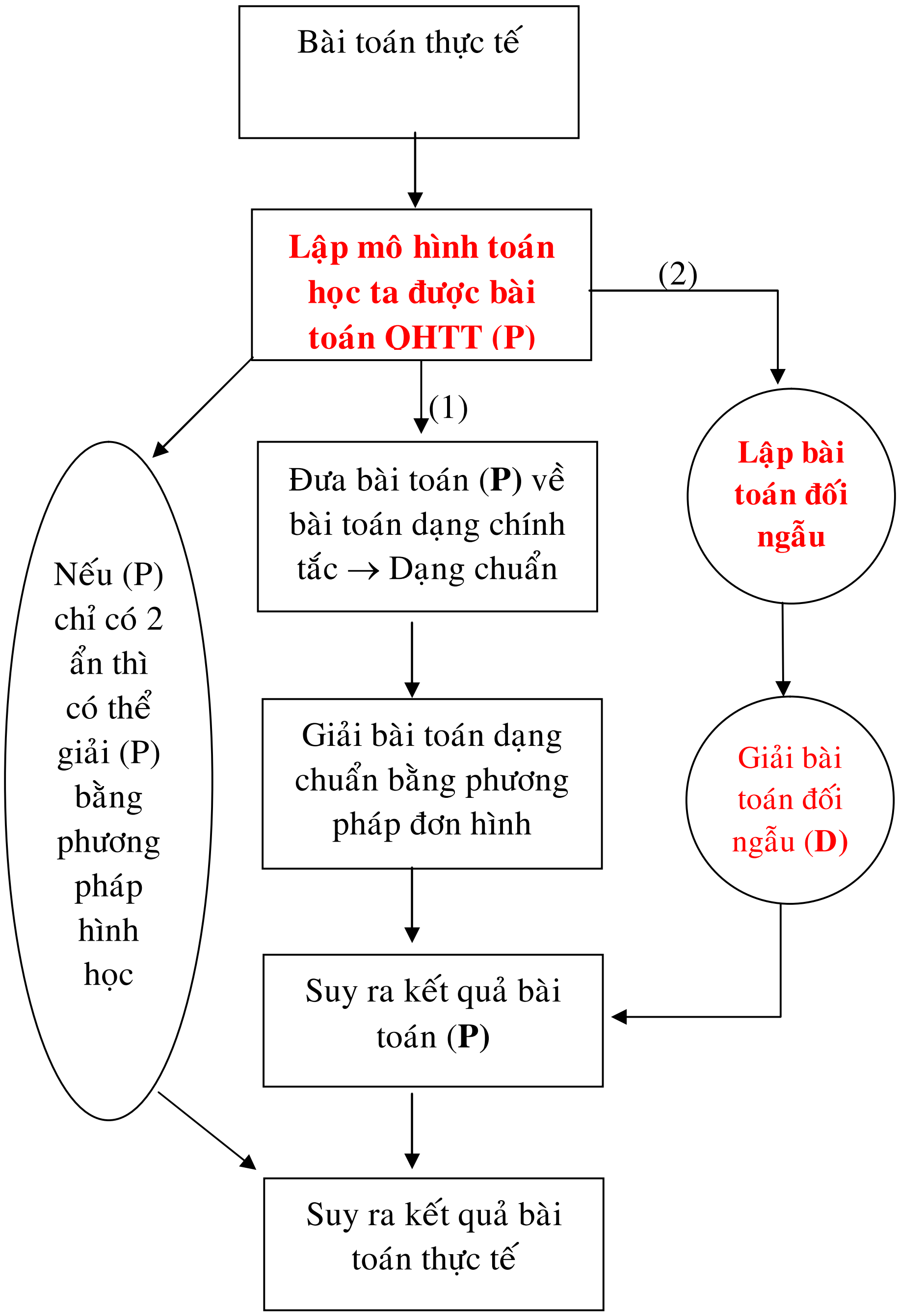
Bài 8 Một công ty sử dụng 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3 để sản xuất ra 1 loại sản phẩm theo 2 công nghệ khác nhau là CN1, CN2. Biết lượng nguyên liệu mỗi loại hiện có, định mức tiêu hao các loại nguyên liệu, chi phí sản xuất, lượng sản phẩm làm ra trong một giờ được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Số lượng nguyên liệu hiện có (đv)	Định mức tiêu hao nguyên liệu trong 1 giờ	
		CN1	CN2
N_1	2500	40	35
N_2	3000	25	30
N_3	4000	45	40
Sản lượng (sản phẩm/giờ)		110	90
Chi phí (USD/giờ)		180	160

Hãy tìm kế hoạch sản xuất sao cho giá thành sản phẩm là thấp nhất.

Chương 2

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU



Nếu (P) đơn giản hơn (D) thì ta giải theo hướng (1); còn nếu (D) đơn giản hơn (P) thì giải theo hướng (2). Tức là, trong hai bài toán (P) và (D), ta xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó trước rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Chương 2

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU

Trong chương này, bạn sẽ học:

- *Định nghĩa và qui tắc thành lập bài toán đối ngẫu.*
- *Liên hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.*(các định lý đối ngẫu)
- *Cách tìm nghiệm của bài toán gốc khi biết nghiệm bài toán đối ngẫu và ngược lại. (định lý độ lệch bù yếu)*

1. Định nghĩa và quy tắc thành lập bài toán bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu (Dual problem) của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc (primal problem) được định nghĩa và thành lập theo quy tắc (*Bảng* 2.*1*) như sau:

- Nếu *bài toán bên trái* của bảng là *bài toán gốc* thì *bài toán bên phải* là *bài toán đối ngẫu* tương ứng.
- Nếu *bài toán bên phải* của bảng là *bài toán gốc* thì *bài toán bên trái* là *bài toán đối ngẫu* tương ứng.

Bảng 2.1

Bài toán P (D)	**Bài toán D (P)**
$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ (1)	$g(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$ (1’)
Ràng buộc thứ i: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{bmatrix} \le b_i \\ \ge b_i \\ = b_i \end{bmatrix}$ (2)	Ẩn thứ i : $y_i \begin{bmatrix} \ge 0 \\ \le 0 \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix}$ (3’)
Ẩn thứ j : $x_j \begin{bmatrix} \ge 0 \\ \le 0 \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix}$ (3)	Ràng buộc thứ j: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \begin{bmatrix} \ge c_j \\ \le c_j \\ = c_j \end{bmatrix}$ (2’)

Các cặp ràng buộc (2) và (3’), (3) và (2’) gọi là các cặp ràng buộc đối ngẫu của nhau.

✻ **Nhận xét:**

- Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu chính là bài toán gốc.
- Mỗi hàng của ma trận $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ của bài toán gốc xác định một ràng buộc trong bài toán gốc. Còn mỗi cột của A xác định một ràng buộc của bài toán đối ngẫu.

Ví dụ 1 Cho bài toán gốc (P) :

(1) $f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 12 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \le 0$, x_4 tùy ý

Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của bài toán trên.

Giải

Vì bài toán gốc (P) có hàm mục tiêu $\rightarrow$ max nên nó tương ứng với bài ở cột trái của *bảng 2.1* . Do đó , bài toán đối ngẫu (D) sẽ ứng với cột phải của bảng :

(3) $g(y) = 15y_1 + 10y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$

(4) $\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 6 & (\text{vì } x_1 \ge 0) \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 4 & (\text{vì } x_2 \ge 0) \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 5 & (\text{vì } x_3 \le 0) \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 & (\text{vì } x_4 \text{ tùy ý}) \end{cases}$

(5) $y_1 \ge 0$, y_2 tùy ý, $y_3 \le 0$ (vì các ràng buộc của (P) tương ứng là $\le$, =, $\ge$)

Ví dụ 2 Cho bài toán gốc (P) :

(1) $f(x) = 8x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 8x_4 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 54 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 48 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \le 0$, x_4 tùy ý

Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của bài toán trên.

Giải

Vì bài toán gốc (P) có hàm mục tiêu $\rightarrow$ min nên nó tương ứng với bài ở cột phải của *bảng 2.1* . Do đó , bài toán đối ngẫu (D) sẽ ứng với cột trái của bảng :

(1) $g(y) = 54y_1 + 60y_2 + 48y_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 8 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \le 9 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 6 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 8 \end{cases}$

(3) $y_1 \le 0$, y_2 tùy ý, $y_3 \ge 0$

2. Các định lý đối ngẫu

2.1. Địnhlý 1 (về sự tồn tại nghiệm)

Đối với cặp bài toán đối ngẫu nhau (P) và (D) chỉ có thể xảy ra một và chỉ một trong ba trường hợp sau đây:

i) Cả hai bài toán đều không có phương án.

ii) Cả hai bài toán đều có phương án. Khi đó cả hai cùng có phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu đối với PATƯ của chúng bằng nhau.

iii) Một trong hai bài toán có phương án, bài toán còn lại không có phương án. Khi đó bài toán có phương án sẽ không có PATƯ và hàm mục tiêu của nó không bị chặn trong miền phương án.

❖ ***Hệ quả 1***: Nếu một trong hai bài toán có PATƯ thì bài toán kia cũng có PATƯ và giá trị tối ưu của chúng bằng nhau.

❖ ***Hệ quả 2***: Điều kiện cần và đủ để hai phương án x^0 của (P) và y^0 của (D) tối ưu là: $f(x^0) = g(y^0)$ (2.1)

2.2. Định lý 2 (độ lệch bù yếu)

Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của (P) và y^0 của (D) tối ưu là:

$$\begin{cases} x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0 - c_j\right) = 0; j = \overline{1,n} \\ y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 - b_i\right) = 0; i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (2.2)$$

3. Cách tìm nghiệm tối ưu của bài toán này khi biết nghiệm tối ưu của bài toán kia.

❖ ***Cách 1***: Dựa vào (2.1) và (2.2) ta có thể tìm nghiệm tối ưu bài toán này khi biết nghiệm tối ưu của bài toán kia.

❖ ***Cách 2***: Chỉ áp dụng khi chúng ta đã giải một trong hai bài toán bằng cách lập bảng đơn hình.

☯ *Trường hợp* đã lập bảng đơn hình giải bài toán gốc (P): Khi đó, phương án cơ bản tối ưu của bài toán đối ngẫu $y^o = (y_1^o, y_2^o, ..., y_m^o)$ được tính theo công thức

$$y_i^o = \Delta_j + c_j \;; i = 1, 2, ..., m$$

trong đó x_j là ẩn cơ bản thứ i trong bảng đơn hình đầu tiên, Δ_j là hệ số ước lượng của x_j trong bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu (*bảng đơn hình cuối cùng*), c_j là hệ số của ẩn x_j trong hàm mục tiêu bài toán (P).

☯ *Trường hợp* đã lập bảng đơn hình giải bài toán đối ngẫu (D): Khi đó, phương án cơ bản tối ưu của bài toán gốc $x^o = (x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ được tính theo công thức

$$x_j^o = \Delta_i + b_i \;; j = 1, 2, ..., n$$

trong đó y_i là ẩn cơ bản thứ j trong bảng đơn hình đầu tiên, Δ_i là hệ số ước lượng của y_i trong bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu (*bảng đơn hình cuối cùng*), b_i là hệ số của ẩn y_i trong hàm mục tiêu bài toán (D).

Ví dụ 3 Cho bài toán (P):

$$(1)\ f(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ 4x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$(3)\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D)

b) Biết bài toán đối ngẫu (D) có PATƯ $y^o = (1, 0, 3/4, 0)$, $g_{max} = \frac{11}{4}$. Hãy tìm PATƯ của bài toán gốc (P).

Giải

a) Bài toán đối ngẫu.

(1) $g(y) = 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 2y_4 \to \max$

(2) $\begin{cases} y_1 + 3y_2 \qquad y_4 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_2 + 4y_3 + y_4 \leq 3 \end{cases}$

(3) $y_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

b) Gọi $x^o = (x_1, x_2, x_3)$ là PATƯ bài toán (P). Theo định lý độ lệch bù yếu, ta có:

$$\begin{cases} 1(x_1 + 2x_2 - 2) = 0 \\ 0(3x_1 + x_2 + x_3 - 4) = 0 \\ 3/4(4x_3 - 1) = 0 \\ 0(x_1 + x_3 - 2) = 0 \\ x_1(1 + 3.0 + 0 - 1) = 0 \\ x_2(2.1 + 0 - 3) = 0 \\ x_3(0 + 4.3/4 + 0 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1/4 \end{cases},\ f_{min} = \frac{11}{4}$$

Ví dụ 4 Cho bài toán gốc (P):

$$(1)\ f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min.$$

$$(2)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$(3)\ x_j \geq 0,\ (j = \overline{1,5})$$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D).

b) Biết phương án tối ưu của P là $x^o = (0, 1, 0, 2, 3)$, $f_{min} = f(x^o) = 6$. Hãy tìm PATƯ bài toán đối ngẫu.

Giải

a) Bài toán gốc có hàm mục tiêu $f \to \min$ nên nó ứng với cột phải của bảng (2.1). Ta suy ra được bài toán đối ngẫu (D).

(1) $g(y) = y_1 + 3y_2 + 8y_3 \to \min.$

$$(2)\begin{cases} 3y_1 & +5y_2 & +2y_3 & \le 1 \\ y_1 & +y_2 & +5y_3 & \le 1 \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & \le 1 \\ & y_2 & & \le 1 \\ & & y_3 & \le 1 \end{cases}$$

(3) y_1, y_2, y_3 tùy ý.

b) Gọi $y^o = (y_1^o, y_2^o, y_3^o)$ là PATƯ bài toán (D). Do $x_2^o = 1$, $x_4^o = 2$, $x_5^o = 3$ nên theo (2.1), ta có:

$$\begin{cases} 1(y_1^o & + y_2^o & + 5y_3^o & -1) & = 0 \\ & 2(y_2^o & & -1) & = 0 \\ & & 3(y_3^o & -1) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^o & = -5 \\ y_2^o & = 1 \\ y_3^o & = 1 \end{cases}$$

Vậy PATƯ của D là $y^o = (-5, 1, 1)$, $g_{max} = 6$.

Ví dụ 5 Cho bài toán (P):

(1) $f(x) = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$

$$(2)\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \ge 6 \\ 3x_1 & & +2x_3 & \ge 2 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \ge 5 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D)

b) Giải một trong hai bài toán rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Giải

a) Bài toán đối ngẫu (D)

(1) $g(y) = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$

$$(2)\begin{cases} 2y_1 & +3y_2 & +y_3 & \le 10 \\ y_1 & & +2y_3 & \le 8 \\ y_1 & +2y_2 & +5y_3 & \le 19 \end{cases}$$

(3) $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$

b) Nếu giải bài toán (P) ta phải thêm vào 3 ẩn phụ và 3 ẩn giả. Nếu giải bài toán (D) ta chỉ cần thêm vào 3 ẩn phụ nên sẽ đơn giản hơn giải (P). Như vậy, ta chọn giải bài toán (D) trước.

Đưa (D) về dạng chuẩn ta được bài toán ($\overline{D}$).

(1) $g(y) = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow \max$

$$(2)\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 10 \\ y_1 + 2y_3 + y_5 = 8 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_6 = 19 \end{cases}$$

(3) $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,6}$

Lập bảng đơn hình để giải ta được

Hệ số	Hệ ABC	PACB	6	2	5	0	0	0	λ_i
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	10	2	3	1	1	0	0	5
0	y_5	8	1	0	2	0	1	0	8
0	y_6	19	1	2	5	0	0	1	19
Bảng 1	$g(y) = 0$		-6	-2	-5	0	0	0	
6	y_1	5	1	3/2	1/2	1/2	0	0	10
0	y_5	3	0	-3/2	3/2	-1/2	1	0	2
0	y_6	14	0	1/2	9/2	-1/2	0	1	28/9
Bảng 2	$g(y) = 30$		0	7	-2	3	0	0	
6	y_1	4	1	2	0	2/3	-1/3	0	
5	y_3	2	0	-1	1	-1/3	2/3	0	
0	y_6	5	0	5	0	1	-3	1	
Bảng 3	$g(y) = 34$		0	5	0	7/3	4/3	0	

Ta thấy $\Delta_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1,6}$ nên ($\overline{D}$) có PATƯ là (4, 0, 2, 0, 0, 5), $g_{max} = 34$. Suy ra bài toán (D) có PATƯ là $y^o = (4, 0, 2)$, $g_{max} = 34$.

Theo định lý độ lệch bù yếu, nếu $x^o = (x_1, x_2, x_3)$ là PATƯ của (P) thì ta có:

$$\begin{cases} 4(2x_1 + x_2 + x_3 - 6) = 0 \\ 2(x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5) = 0 \\ x_3(4 + 2.0 + 5.2 - 19) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7/3 \\ x_2 = 4/3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy PATƯ của bài toán (P) là $x^o = (7/3; 4/3; 0)$, $f_{min} = 34$.

Cách khác: Trong bảng đơn hình đầu tiên, ẩn cơ bản thứ 1, 2, 3 lần lượt là y_4, y_5, y_6 và trong bảng đơn hình cuối cùng các ước lượng tương ứng là $\Delta_4 = \frac{7}{3}, \Delta_5 = \frac{4}{3}, \Delta_6 = 0$ (các hệ số trong hàm mục tiêu $b_4 = 0$, $b_5 = 0$, $b_6 = 0$). Suy ra $x_1 = \frac{7}{3} + 0 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$, $x_3 = 0 + 0 = 0$. Vậy phương án tối ưu bài toán gốc (P) là $x^o = (7/3; 4/3; 0)$, $f_{min} = 34$.

Ví dụ 6 Cho bài toán qui hoạch tuyến tính (P):

(1) $f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 9 \end{cases}$

(3) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng. Giải bài một trong hai bài toán và suy ra kết quả bài toán còn lại.

Giải

Bài toán đối ngẫu (D) tương ứng:

(1) $g(y) = 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 4 \end{cases}$

(3) $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$

Nếu giải bài toán (P) ta phải thêm vào 3 ẩn phụ và 3 ẩn giả. Nếu giải bài toán (D) ta chỉ cần thêm vào 3 ẩn phụ nên sẽ đơn giản hơn giải (P). Như vậy, ta chọn giải bài toán (D) trước. Đưa bài toán (D) về dạng chính tắc $(\overline{D})$:

(1) $g(y) = 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 0(y_4 + y_5 + y_6) \to \max$

(2) $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 = 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_6 = 4 \end{cases}$

(3) $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,6}$

Bài toán ($\overline{D}$) đã có dạng chuẩn nên ta đưa số liệu vào bảng đơn hình để giải.

Hệ số	Hệ ACB	PACB	8	7	9	0	0	0	λ_i
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	4	2	1	3	1	0	0	4/3
0	y_5	3	3	2	2	0	1	0	3/2
0	y_6	4	4	2	1	0	0	1	2
Bảng 1	g(y) = 0		-8	-7	-9	0	0	0	
9	y_3	4/3	2/3	1/3	1	1/3	0	0	4
0	y_5	1/3	5/3	4/3	0	-2/3	1	0	1/5
0	y_6	8/3	10/3	5/3	0	-1/3	0	1	4/5
Bảng 2	g(y) = 12		-2	-4	0	3	0	0	
9	y_3	5/4	-1/4	0	1	1/2	-1/4	0	
7	y_2	1/4	5/4	1	0	-1/2	3/4	0	
0	y_6	9/4	5/4	0	0	1/2	-5/4	1	
Bảng 3	g(y) = 13		3	0	0	1	3	0	

$\Delta_j \ge 0$, $\forall j = \overline{1,6}$ nên PA đang có tối ưu và $y_{max} = (0;1/4;5/4;0;0;9/4)$, $g_{max} = 13$.
Vậy PATƯ của bài toán (D) là $y_{max} = (y_1,y_2,y_3) = (0;1/4;5/4)$ và $g_{max} = 13$.

❖ Tìm nghiệm bài toán gốc:
$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7) = 0 \\ \frac{5}{4}(3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9) = 0 \\ x_3(4.0 + 2.\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy PATƯ của bài toán (P) là $x_{min} = (x_1,x_2,x_3) = (1;3;0)$ và $f_{min} = 13$.

Cách khác: Trong bảng đơn hình đầu tiên, ẩn cơ bản thứ 1, 2, 3 lần lượt là y_4, y_5, y_6 và trong bảng đơn hình cuối cùng các ước lượng tương ứng là $\Delta_4 = 1, \Delta_5 = 3, \Delta_6 = 0$ (các hệ số trong hàm mục tiêu $b_4 = 0$, $b_5 = 0$, $b_6 = 0$). Suy ra $x_1 = 1 + 0 = 1$, $x_2 = 3 + 0 = 3$, $x_3 = 0 + 0 = 0$. Vậy phương án tối ưu bài toán gốc (P) là $x_{min} = (x_1,x_2,x_3) = (1;3;0)$ và $f_{min} = 13$.

Ví dụ 7 Cho bài toán (P)

(1) $f(x) = 3x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \le 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,3}$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).

b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Giải

a) Bài toán đối ngẫu tương ứng (D):

$$(1)\quad g(y) = 9y_1 + 14y_2 + 7y_3 \to \max$$

$$(2)\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \le 3 \\ 5y_1 - 3y_2 + 4y_3 \le 3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1 \end{cases}$$

(3) $y_1 \le 0$, y_2 tùy ý, y_3 tùy ý

b) Trong hai bài toán thì bài toán gốc đơn giản hơn vì: Để giải bài toán gốc chúng ta chỉ cần đưa vào một ẩn phụ và hai ân giả; để giải bài toán đối ngẫu chúng ta phải đổi dấu một ẩn âm, đổi biến hai ẩn tùy ý thành 4 ẩn và đưa vào 3 ẩn phụ.

Đưa bài toán gốc về dạng chuẩn (P_M)

(1) $f_M(x) = 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + M(x_5 + x_6) \to \min$ (với M là số dương lớn tùy ý)

$$(2)\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 7 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,6}$

Lập bảng đơn hình (có thể không cần lập cột x_5, x_6)

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	3	3	1	0	M	M	λ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	9	1	5	1	1	0	0	9
M	x_5	14	2	-3	2	0	1	0	7
M	x_6	7	1	4	1	0	0	1	7(min)
Bảng 1	$f_M(x) = 21M$		3M-3	M-3	3M-1	0	0	0	
0	x_4	2	0	1	0	1	0	-1	
M	x_5	0	0	-11	0	0	1	-2	
1	x_3	7	1	4	1	0	0	1	
Bảng 2	$f_M(x) = 7$		-2	-11M+1	0	0	0	1-3M	

Trong bảng 2, vì M là số dương lớn nên $\Delta_j \le 0$ $\forall$ $j = \overline{1,6}$. PACB hiện có của bài toán (P_M) là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 7, 2, 0, 0)$ tối ưu. Trong hệ ẩn cơ bản chỉ còn ẩn giả x_5 nhưng $x_5 = 0$ nên bài toán (P) có PATƯ là $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,7)$ và $f_{\min} = 7$.

Theo định lý độ lệch bù yếu ta có: $\begin{cases} 7(y_1 + 2y_2 + y_3 - 1) = 0 \\ y_1(0 + 5\times 0 + 7 - 9) = 0 \\ y_3(0 + 5\times 0 + 7 - 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \\ y_3 = 1 - 2t \end{cases}$

Phương án tối ưu bài toán đối ngẫu (D) là: $(y_1, y_2, y_3) = (0, t, 1-2t), \forall t \in \mathbb{R}$; $g_{\max} = 7$

Ví dụ 8 Cho bài toán (P)

(1) $f(x) = 7x_1 + 14x_2 + 18x_3 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 10x_3 \le 3 \end{cases}$

(3) x_1 tùy ý, x_2 tùy ý, $x_3 \le 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).

b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Giải

a) Bài toán đối ngẫu tương ứng (D):

(1) $g(y) = 3y_1 + 1y_2 + 3y_3 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} y_1 + y_2 + 4y_3 = 7 \\ 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 14 \\ 2y_1 + 2y_2 + 10y_3 \le 18 \end{cases}$

(3) $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$

b) Trong hai bài toán thì bài toán đối ngẫu đơn giản hơn vì: Để giải bài toán đối ngẫu chúng ta chỉ cần đưa vào một ẩn phụ và hai ân giả; để giải bài toán gốc chúng ta phải đổi dấu một ẩn âm, đổi biến hai ẩn tùy ý thành 4 ẩn và đưa vào 3 ẩn phụ.

Đưa bài toán đối ngẫu (D) về dạng chuẩn (D_M)

(1) $g_M(y) = 3y_1 + y_2 + 3y_3 + 0y_4 + M(y_5 + y_6) \rightarrow \min$ (với M là số dương lớn tùy ý)

(2) **(2)** $\begin{cases} y_1 + y_2 + 4y_3 + y_6 = 7 \\ 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_5 = 14 \\ 2y_1 + 2y_2 + 10y_3 + y_4 = 18 \end{cases}$

(3) $y_j \ge 0$, $j = \overline{1,6}$

Lập bảng đơn hình (có thể không cần lập cột y_5, y_6)

Hệ số	Hệ ẩn cơ bản	PACB	3	1	3	0	M	M	λ_i
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
M	y_6	7	1	1	4	0	0	1	7
M	y_5	14	2	2	-3	0	1	0	7
0	y_4	18	2	2	10	1	0	0	9
Bảng 1	$g_M(y) = 21M$		3M-3	3M-1	M-3	0	0	0	
1	y_2	7	1	1	4	0	0	1	
M	y_5	0	0	0	-11	0	1	-2	
0	y_4	4	0	0	2	1	0	-2	
Bảng 2	$g_M(y) = 7$		-2	0	-11M+1	0	0	-3M+1	

Trong bảng 2, vì M là số dương lớn nên $\Delta_j \le 0\ \forall\ j = \overline{1,6}$. PACB hiện có của bài toán (D_M) là $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (0, 7, 0, 4, 0, 0)$ tối ưu. Trong hệ ẩn cơ bản chỉ còn ẩn giả y_5 nhưng $y_5 = 0$ nên bài toán (D) có PATƯ là $(y_1, y_2, y_3) = (0,7,0)$ và $g_{\min} = 7$.

Theo định lý độ lệch bù yếu ta có:

$$\begin{cases} 7(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \\ \\ x_3(2\times 0 + 2\times 7 + 10\times 0 - 18) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = t \quad \text{với mọi } t \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Phương án tối ưu bài toán gốc (P) là: $(x_1, x_2, x_3) = (1-2t, t, 0), \forall t \in \mathbb{R}$; $f_{\max} = 7$

Ví dụ 9 Cho bài toán (P)

(1) $f(x) = 12x_1 + 14x_2 + 36x_3 + 23x_4 \to \max$

(2) $$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad + 4x_3 + 3x_4 \le 2 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad\qquad \le -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le -4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 \le 2 \end{cases}$$

(3) $x_1 \ge 0$, x_2 tùy ý, $x_3 \le 0$, $x_4 \le 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).
b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Giải

a) Bài toán đối ngẫu tương ứng của (P) là (D):

(1) $g(y) = 2y_1 - 5y_2 - 4y_3 + 2y_4 \to \min$

$$(2)\begin{cases} 2y_1 & & +y_3 & -3y_4 & \geq 12 \\ & y_2 & +y_3 & +2y_4 & = 14 \\ 4y_1 & & +y_3 & -9y_4 & \leq 36 \\ 3y_1 & & +2y_3 & -5y_4 & \leq 23 \end{cases}$$

(3) $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0$

b) Trong hai bài toán thì bài toán đối ngẫu đơn giản hơn vì: Để giải bài toán đối ngẫu chúng ta chỉ cần đưa vào ba ẩn phụ và một ẩn giả; để giải bài toán gốc chúng ta phải đổi dấu hai ẩn âm, đổi biến một ẩn tùy ý thành 2 ẩn và đưa vào 4 ẩn phụ và 2 ẩn giả. Đưa bài toán đối ngẫu (D) về dạng chuẩn (D_M):

(1') $g_M(y) = 2y_1 - 5y_2 - 4y_3 + 2y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + My_8 \to \min$ (với M là số dương lớn tùy ý)

$$(2')\begin{cases} 2y_1 & & +y_3 & -3y_4 & -y_5 & & & +y_8 & =12 \\ & y_2 & +y_3 & +2y_4 & & & & & =14 \\ 4y_1 & & +y_3 & -9y_4 & & +y_6 & & & =36 \\ 3y_1 & & +2y_3 & -5y_4 & & & +y_7 & & =23 \end{cases}$$

(3') $y_j \geq 0$, $j = \overline{1,8}$

Lập bảng đơn hình (có thể không cần lập cột y_8)

Hệ số	Hệ ACB	PA CB	2	-5	-4	2	0	0	0	M	λ_i
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	
M	y_8	12	**2**	0	1	-3	-1	0	0	1	6
-5	y_2	14	0	1	1	2	0	0	0	0	-
0	y_6	36	4	0	1	-9	0	1	0	0	9
0	y_7	23	3	0	2	-5	0	0	1	0	$\frac{23}{3}$
Bảng 1	$g_M(y)$ = 12M-70		2M-2	0	M-1	-3M-12	-M	0	0	0	
2	y_1	6	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	
-5	y_2	14	0	1	1	2	0	0	0	0	
0	y_6	12	0	0	-1	-3	2	1	0	-2	
0	y_7	5	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	
Bảng 2	$g_M(y)$ = -58		0	0	0	-15	-1	0	0	1-M	

Trong bảng 2, vì M là số dương lớn nên $\Delta_j \leq 0$ $\forall$ $j = \overline{1,8}$. PACB hiện có của bài toán (D_M) là $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ = (6, 14, 0, 0, 0, 12,5,0) tối ưu. Vì ẩn giả $y_8 = 0$ nên bài toán (D) có PATƯ là (y_1, y_2, y_3, y_4) = (6, 14, 0, 0) và $g_{\min}$ = -58.

Theo định lý độ lệch bù yếu ta có: $\begin{cases} 6(2x_1+4x_3+3x_4-2)=0 \\ 14(x_2+5)=0 \\ x_3(4\times 6-36)=0 \\ x_4(3\times 6-23)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-5 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$

Phương án tối ưu bài toán gốc (P) là: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,-5,0,0)\mathbb{R}$; $f_{\max} = -58$

Bài tập

Bài 2.1 Cho bài toán gốc (P):

(1) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \end{cases}$

(3) $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,4})$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P).

b) Giải bài toán gốc (P) và suy ra kết quả về bài toán đối ngẫu (D).

Bài 2.2 Cho bài toán gốc (P):

(1) $f(x) = 12x_1 + 15x_2 + 20x_3 \to \min$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 3 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P).

b) Giải bài toán đối ngẫu và suy ra kết quả bài toán gốc.

Bài 2.3 Cho bài toán gốc (P):

(1) $f(x) = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \to \max$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le -2 \end{cases}$

(3) x_1, x_2 tùy ý, $x_3 \le 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).

b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Bài 2.4 Cho bài toán gốc (P):

(1) $f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \to \min$

$$(2)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,4}$)

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).

b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Bài 2.5 Cho bài toán đối ngẫu (D):

(1) $f(x) = 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \to \max$

$$(2)\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le 12 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \le 15 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 20 \end{cases}$$

(3) $y_i \ge 0$ ($i = \overline{1,3}$)

a) Lập bài toán gốc (P) tương ứng của (D).

b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Bài 2.6 Cho bài toán gốc (P): (1) $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$

$$(2)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20 \end{cases}$$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).

b) Trong hai bài toán, xét xem bài toán nào đơn giản hơn thì giải bài toán đó rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Bài 2.7 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau :

$$\begin{aligned} f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\to \text{Min} \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\ge 10 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\ge 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\ge 12 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1...3) & \end{aligned}$$

a). Giải bài toán trên.

b). Viết bài toán đối ngẫu . Tìm PATƯ của bài toán đối ngẫu.

c). bài toán đã cho có PATƯ duy nhất không ?

Bài 2.8 Cho bài toán quy hoach tuyến tính sau đây :

$$f(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 8$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

a) Giải bài toán trên.

b) Tìm phương án tối ưu khác (nếu có).

c) Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài 2.9 Cho bài toán QHTT sau :

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4$$
$$2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

a) Giải bài toán trên .

b) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu .

Bài 2.10 Một xí nghhiệp sản xuất 3 loại sản phẩm A, B, C với các số liệu như sau :

Loại sản phẩm	A	B	C
Giá bán (1.000 đ/đv)	32	50	58
Chi phí sảnxuất (1.000 đ/đv)	20	30	40
Thời gian hoàn tất SP (giờ /đv)	1	2	3

Biết rằng xí nghiệp hiện có số vốn dùng cho sản xuất là 3 triệu đồng, quỹ thời gian sản xuất là 180 giờ và theo các hợp đồng đã ký kết với khách hàng, yêu cầu sản phẩm A phải có lượng sản xuất ít nhất là 100đv. Giả sử mọi sản phẩm sản xuất ra đều tiêu thụ được hết.

a) Tìm kế hoạch sản xuất cho tổng lợi nhuận lớn nhất.

b) Tìm phương án tối ưu khác của bài toán (nếu có).

c) Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài 2.11 (*3 điểm*) Cho bài toán gốc (P):

(1) $f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

(2) $$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geq 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

(3) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

a) Lập bài toán đối ngẫu (D) tương ứng của (P).

b) Giải một trong hai bài toán rồi suy ra kết quả bài toán còn lại.

Câu hỏi trắc nghiệm

(chọn một trong 4 câu: A, B, C,D)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu bài toán đối ngẫu có hàm mục tiêu max thì bài toán gốc có hàm mục tiêu min.

B) Nếu bài toán đối ngẫu có hàm mục tiêu min thì bài toán gốc có hàm mục tiêu max.

C) Với mỗi cặp ràng buộc đối ngẫu, nếu ràng buộc này là đẳng thức thì ràng buộc kia tùy ý.

D) Nếu bài toán gốc có dạng chính tắc thì bài toán đối ngẫu cũng có dạng chính tắc.

Câu 2 Cho (P) và (D) là hai bài toán đối ngẫu của nhau**.** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu (P) không có PATƯ thì (D) không có PATƯ.

B) Nếu (D) không có PATƯ thì (P) không có PATƯ.

C) Nếu (D) không có phương án thì (P) không có phương án.

D) Nếu (P) có phương án tối ưu thì (D) có PATƯ.

Câu 3 Cho (P) và (D) là hai bài toán đối ngẫu của nhau**.** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu cả hai bài toán có phương án thì chúng cùng có PATƯ.

B) Nếu cả hai bài toán có PATƯ thì giá trị hàm mục tiêu đối với PATƯ của chúng bằng nhau.

C) Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu nhau có phương án tối ưu thì bài toán còn lại cũng có phương án tối ưu.

D) Nếu (P) không có phương án thì (D) không có phương án.

Câu 4 Cho (P) có hàm mục tiêu f(x) và (D) có hàm mục tiêu g(y) là hai bài toán đối ngẫu của nhau **.** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu hai phương án x^0 của (P) và y^0 của (D) tối ưu thì $f(x^0) = g(y^0)$.

B) Nếu hai phương án x^0 của (P) và y^0 của (D) thỏa $f(x^0) = g(y^0)$ thì chúng là phương án tối ưu.

C) Cả A và B đều đúng.

D) Cả A và B đều sai.

Câu 5 Cho (P) và (D) là hai bài toán đối ngẫu của nhau**.** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu (P) có phương án và hàm mục tiêu không bị chặn thì (D) không có phương án.

B) Nếu (D) có phương án và hàm mục tiêu không bị chặn thì (P) không có phương án.

C) Nếu (D) có phương án thì (P) cũng có phương án.

D) Bài toán (P) có PATƯ khi và chỉ khi (D) có PATƯ.

Bảng 2.2

Bài toán P $\Rightarrow$	**Bài toán D**
$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$ (1)	$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$ (1')
Ràng buộc thứ i: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{bmatrix} \le b_i \\ \ge b_i \\ = b_i \end{bmatrix}$ (2)	Ẩn thứ i : $y_i \begin{bmatrix} \le 0 \\ \ge 0 \\ \textit{tuy}\text{ y} \end{bmatrix}$ (3')
Ẩn thứ j : $x_j \begin{bmatrix} \ge 0 \\ \le 0 \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix}$ (3)	Ràng buộc thứ j: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \begin{bmatrix} \le c_j \\ \ge c_j \\ = c_j \end{bmatrix}$ (2')

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH CÓ THAM SỐ

Trong thực tế, do có một số điều kiện kinh tế và kỹ thuật không xác định nên mô hình bài toán tương ứng là bài toán quy hoạch tuyến tính mà các hệ số có chứa tham số. Để giải bài toán này, ***chúng ta xem tham số là các số không đổi*** rồi lập bảng đơn hình giải bình thường. Tiếp theo, trong các bảng đơn hình lập được, chúng ta tìm các khoảng biến thiên của tham số để phương án cơ bản có được là phương án tối ưu hoặc bài toán không có phương án tối ưu. Bằng cách đó, chúng ta sẽ giải được bài toán.

Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính có tham số t sau đây.

Bài 1

(1) $f(x) = 10x_1 + 3x_2 - 2x_3 + tx_4 + 2x_5 + 4x_6 \to \max$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ 4x_1 + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 18 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Bài 2

(1) $f(x) = tx_1 + 12x_2 + (4-t)x_3 + 10x_4 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 24 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4$

Bài 3

(1) $f(x) = 2x_1 + tx_2 + (3-t)x_3 \to \max$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15 \end{cases}$$

(3) $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4$

Chương 3

BÀI TOÁN VẬN TẢI

Trong chương này, bạn sẽ học:

- Bài toán vận tải cân bằng thu phát.
- Cách tìm phương án cực biên ban đầu.
- Thuật toán "quy 0 cước phí các ô chọn".
- Thuật toán thế vị.
- Bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại.
- Bài toán vận tải không cân bằng thu phát.
- Bài toán vận tải có ô cấm.

Nhiều bài toán trong thực tế có dạng bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại hay bài toán có ô cấm. Do đó, các bạn sinh viên cần nắm vững các bài toán này và thuật toán giải nó để có thể ứng dụng vào thực tế tốt hơn.

Thuật toán "quy 0 cước phí các ô chọn" và "thuật toán thế vị" có độ phức tạp tính toán tương đương nhau. Cơ sở toán học của thuật toán "thuật toán thế vị" phức tạp hơn cơ sở toán học của thuật toán "quy 0 cước phí các ô chọn".

§ 1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

1.1-Nội dung và mô hình toán học bài toán vận tải.

❖ ***Nội dung bài toán:*** Giả sử

♦ Có m nơi là $A_1, A_2,...,A_m$ cung cấp một loại hàng hóa nào đó với khối lượng tương ứng là $a_1, a_2,..., a_m$. (giả sử đơn vị là tấn).

♦ Cùng lúc đó có n nơi là $B_1, B_2,..., B_n$ tiêu thụ loại hàng đó với khối lượng yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2,..., b_n$ (tấn).

♦ Ta gọi A_i là điểm phát hàng thứ i $\left(i = \overline{i,m}\right)$ và B_j là điểm thu hàng thứ j $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

♦ Chi phí chuyên chở một tấn hàng từ A_i đến B_j là c_{ij} đồng. Ma trận $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ gọi là ma trận cước phí.

Nếu tổng lượng hàng cần phát đi ở các điểm phát bằng tổng lượng hàng thu về ở các điểm thu $\left(\sum a_i = \sum b_j\right)$ thì bài toán gọi là bài toán vận tải *cân bằng thu phát*. Ngược lại ta gọi là bài toán *không cân bằng thu phát.*

Trong bài §1 này, để cho đơn giản ta chỉ xét bài toán cân bằng thu phát. Bài toán không cân bằng thu phát sẽ xét ở các mục sau.

Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu hàng để:

- Các điểm phát đều phát hết hàng.
- Các điểm thu đều nhận đủ hàng yêu cầu.
- Tổng cước phí phải trả là ít nhất.

❖ ***Phân tích bài toán:*** Đặt x_{ij} là số tấn hàng chuyển từ A_i đến B_j.

♦ Lượng hàng vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu không âm : $x_{ij} \geq 0\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$

♦ Tổng lượng hàng phát đi từ A_i đến tất cả các B_j là:

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{ij} + ... + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

Vì các điểm phát phải phát hết hàng nên ta có : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$

♦ Tổng lượng hàng thu về B_j từ tất cả các A_i là:

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{ij} + ... + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

Vì các điểm thu phải thu đủ hàng nên ta có : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$

- Tổng cước phí phải trả: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Tổng này càng nhỏ càng tốt.

Từ các phân tích trên, ta có mô hình bài toán:

$$(1)\quad f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

$$(3)\quad x_{ij} \geq 0\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$$

Một ma trận $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ thỏa (2) và(3) gọi là một phương án của bài toán vận tải. Một phương án thỏa mãn (1), tức là tốn cước phí nhỏ nhất so với mọi phương án, gọi là phương án tối ưu.

1.2. Đặt bài toán dưới dạng bảng

1.2.1- *Nhận xét*: Bài toán vận tải là bài toán QHTT nên có thể giải như ở chương 1. Nhưng khi đó số ẩn khá lớn (m×n ẩn chính và m + n ẩn giả) và số ràng buộc cũng lớn (m + n ràng buộc) nên việc giải bằng phương pháp đơn hình sẽ rất phức tạp. Tuy nhiên, do tính chất đặt biệt của bài toán vận tải, nên người ta đưa ra một số thuật toán khác hiệu quả hơn.

Trước hết ta trình bày bài toán dưới dạng bảng:

Thu / phát	B_1 b_1	B_2 b_2	...	B_j b_j	...	B_n b_n
$A_1 : a_1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
$A_2 : a_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
$A_i : a_i$	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
$A_m : a_m$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Trong bảng:

- Mỗi hàng đặt trưng cho một điểm phát.
- Mỗi cột đặt trưng cho một điểm thu.
- Mỗi ô đặt trưng cho một tuyến đường từ một điểm phát đến một điểm thu. Ô nằm trên hàng i, cột j đặc trưng cho tuyến đường từ A_i đến B_j gọi là ô (i, j).

1.2.3- Định nghĩa: Một dãy các ô của bảng mà 2 ô liên tiếp của dãy (và không quá 2 ô) luôn nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột gọi là dây chuyền. Một dây chuyền khép kín gọi là một vòng.

Ví dụ 1 Trong bảng 1 và bảng 2 các ô có đánh dấu "x" lập thành dây chuyền. Ta thấy hai ô liên tiếp tính theo các chỉ số đánh ở dưới đây luôn nằm trên cùng hàng hoặc cùng một cột.

Bảng 1

	x	x	
		x	x
x			
x			x

Bảng 2

	x	x	
x			x
x		x	

Còn trong *bảng 3 và bảng 4* các ô có đánh dấu "x" lập thành vòng.

Bảng 3

x		x	
		x	x
x			x

Bảng 4

		x	x
x			x
x		x	

1.2.4- Định nghĩa:

Trong một phương án nào đó, những ô ứng với $x_{ij} \rangle 0$ được gọi là *ô chọn*. Những ô còn lại được gọi là *ô loại*. *Ô chọn* đặc trưng cho tuyến đường ta **có** vận tải hàng đi qua. Còn *ô loại* đặc trưng cho tuyến đường ta **không có** vận tải hàng đi qua.

1.2.5- Định nghĩa: Một phương án mà các ô chọn không tạo thành vòng gọi là *phương án cơ bản* của bài toán vận tải. Một PACB *có đúng* $m + n - 1$ ô chọn gọi là *không suy biến*, nếu *có ít hơn* $m + n - 1$ ô chọn thì gọi là *suy biến* .

1. 3. Tính chất của bài toán vận tải.

***1.3.1. Tính chất 1*:** Bài toán vận tải *cân bằng thu phát* luôn có phương án tối ưu.

Chứng minh

Do bài toán cân bằng thu phát nên $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Đặt $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}$, thì $x_{ij} \geq 0$ và ta có :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i \ ; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j$$

Vậy bài toán có phương án.

Ngoài ra $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0$, tức là hàm mục tiêu bị chặn dưới.

Vậy bài toán có phương án và hàm mục tiêu bị chặn dưới nên có phương án tối ưu.

1.3.2. Tính chất 2:

Giả sử ta có bảng gồm m hàng, n cột và E là một tập hợp gồm m + n –1 ô của bảng không chứa vòng. Giả sử (i,j) là ô của bảng không thuộc E. Nếu ta bổ sung (i,j) vào E để được E_1 thì E_1 sẽ chứa một vòng duy nhất là V. Tiếp theo, nếu loại khỏi E_1 một ô tùy ý thuộc vòng V để được E_2 , thì E_2 lại gồm m + n –1 ô của bảng không chứa vòng.

Bảng 5

x	x		x
		x	
x	(3,2)		
		x	x

Ví dụ 2 Trong *bảng 3* gồm 4 hàng 4 cột có tập E gồm m + n – 1 = 4 + 4 – 1 = 7 ô không chứa vòng có đánh dấu “x” và ô (3,2) là ô của bảng không thuộc E. Khi bổ sung (3,2) vào E sẽ có vòng duy nhất được đánh dấu trong bảng. Vì là vòng duy nhất, nên xóa đi một ô của V thì sẽ mất vòng.

Chú ý: Trong định nghĩa phương án cơ bản không suy biến, ta đòi hỏi số ô chọn là m+n–1. Trong trường hợp suy biến, ta có thể bổ sung một số ô loại sao cho phương án cơ bản có đủ m + n –1 ô chọn và không chứa vòng. Các ô loại được bổ sung này gọi là các “**ô chọn 0**”.

1. 4. Lập phương án cơ bản ban đầu

1.4.1. Phương pháp cực tiểu cước phí: Ý tưởng phương pháp này là ưu tiên phân phối nhiều nhất vào các ô có cước phí nhỏ nhất.

Giả sử trong ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$, c_{rs} là nhỏ nhất trong các c_{ij}. Khi đó, ta phân phối tối đa vào ô (r,s), cụ thể:

$$x_{rs} = \begin{cases} a_r & \text{nếu } a_r < b_s \quad (\text{TH1}) \\ b_s & \text{nếu } a_r > b_s \quad (\text{TH2}) \\ a_r & \text{nếu } a_r = b_s \quad (\text{TH3}) \end{cases}$$

- Trong trường hợp 1, điểm phát A_r đã phát hết hàng nên có thể xóa đi hàng A_r của bảng; ở điểm thu B_s chỉ còn cần $(b_s - a_r)$ tấn hàng.

- Trong trường hợp 2, điểm thu B_s đã nhận đủ hàng, nên có thể xóa đi cột B_s của bảng và ở điểm phát A_r chỉ còn lại $(a_r - b_s)$ tấn hàng.
- Trong trường hợp 3, điểm phát A_r đã phát hết hàng và điểm thu B_s đã nhận đủ hàng nên có thể xóa đi hàng A_r và cột B_s của bảng.
- Trong bảng còn lại với số hàng và cột ít hơn, ta lại tiếp tục phân phối như trên cho đến khi hết hàng.

Các ô chọn tìm được sẽ không chứa vòng và là phương án cơ bản. Nếu chưa đủ m + n – 1 ô thì ta bổ sung thêm một số *ô chọn -0* cho đủ m + n –1 không tạo thành vòng.

Ví dụ 3: Tìm phương án cơ bản ban đầu của bài toán vận tải cân bằng thu phát sau.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 70	2	3	1
A_2 : 40	5	2	3
A_3 : 20	5	2	6

Thứ tự phân vào các ô như sau:

- Phân vào ô (1,3) 50 tấn, xóa cột B_3, điểm phát A_1 chỉ còn 20 tấn.
- Phân vào ô (1,1) 20 tấn, xóa hàng A_1, điểm thu B_1 chỉ còn cần 40 tấn.
- Phân vào ô (2,2) 20 tấn, xóa cột B_2, điểm phát A_2 chỉ còn 20 tấn.
- Phân vào ô (2,1) 20 tấn, xóa hàng A_2, điểm thu B_1 chỉ còn cần 20 tấn.
- Cuối cùng phân vào ô (3,1) 20 tấn. Ta được phương án cơ bản ban đầu như bản sau.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 70	2 × 20	3	1 × 50
A_2 : 40	5 × 20	2 × 20	3
A_3 : 20	5 × 20	2	6

Tổng cước phí là f = 2.20 +1.50 + 5.20 + 2.20 + 5.20 = 330. Kiểm lại ta có 5 ô chọn, đúng bằng m + n – 1 và không có vòng nên là một PACB không suy biến.

1.4.2. Phương pháp Folgels:

Phương pháp Folgels cho PACB khá tốt, theo nghĩa nó khá gần với PATƯ nên ta chỉ cần một số ít bước lập thì được PATƯ. Nội dung phương pháp như sau:

- *Bước 1:* Trên mỗi hàng, mỗi cột ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.
- *Bước 2:* Chọn hàng hay cột có có hiệu số tính ở bước 1 lớn nhất. Nếu có nhiều hàng hay cột có hiệu số bằng nhau thì chọn hàng hay cột chứa cước phí nhỏ nhất trong số đó.
- *Bước 3:* Phân phối tối đa vào ô có cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đã chọn rồi xóa hàng (cột) đó (tương tự như phương pháp cực tiểu cước phí). Với bảng vận tải gọn hơn, ta quay lại bước 1 và quá trình được lặp lại cho đến khi hết hàng.

Ví dụ 4: Tìm phương án cơ bản ban đầu của bài toán vận tải cân bằng thu phát trong ví dụ 3 bằng phương pháp Folgels.

Tính hiệu số trên mỗi hàng, mỗi cột ta thấy hiệu số lớn nhất ở cột B_1 và hàng A_3.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50	Hiệu số
A_1 : 70	2 60	3	1	1
A_2 : 40	5	2	3	1
A_3 : 20	5	2	6	3(max)
Hiệu số	3(max)	1	2	

- Chọn cột B_1 và phân phối tối đa vào ô (1,1) 60 tấn hàng, điểm phát A_1 chỉ còn cần 10 tấn, xóa cột B_1. Tính lại hiệu số ta được

Thu / Phát	B_2 20	B_3 50	Hiệu số
A_1 : 10	3	1	2
A_2 : 40	2	3	1
A_3 : 20	2 20	6	4(max)
Hiệu số	1	2	

- Chọn hàng A_3 và phân phối tối đa vào ô (3,2) 20 tấn hàng, điểm thu B_2 cũng đã nhận đủ, nên xóa hàng A_3 và cột B_2 .

- Trong bảng chỉ còn lại một cột B_3 , ta phân phối vào ô (1,3) 10 tấn, ô (2,3) 40 tấn.

Ta được phương án cơ bản ban đầu như bản sau.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 70	2 × 60	3	1 × 10
A_2 : 40	5	2 × 0	3 × 40
A_3 : 20	5	2 × 20	6

Tổng cước phí là f = 2.60 +1.10 + 3.40 + 2.20 = 290 < 330, tốt hơn so với PACB có được bằng phương pháp cực tiểu cước phí trong ví dụ 3. Kiểm lại ta có 4 ô chọn, nhỏ hơn m + n – 1 = 3 + 3 -1= 5 và không có vòng nên PACB này suy biến. Vậy còn thiếu một ô, ta bổ sung thêm ô chọn 0, chẳng hạn ô (2,2).

1. 5. Thuật toán "Quy 0 cước phí các ô chọn".

1.5.1. Định lý

Nếu ta cộng vào hàng i của ma trận cước phí $C = (c_{ij})_{m\times n}$ số r_i tùy ý $(i = \overline{1,m})$ và cộng vào cột j số s_j tùy ý $(j = \overline{1,n})$, ta sẽ có bài toán vận tải mới với ma trận cước phí $C' = (c'_{ij})_{m\times n}$, với $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$, tương đương với bài toán ban đầu (nghĩa là phương án tối ưu của bài toán này cũng là phương án tối ưu của bài toán kia và ngược lại)

<u>Chứng minh</u>

Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ là hàm mục tiêu ứng với ma trận cước phí C = $(c_{ij})_{m\times n}$ và

$f'(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij}$ là hàm mục tiêu ứng với ma trận cước phí C' = $(c'_{ij})_{m\times n}$. Ta có:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + r_i + s_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} r_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} s_j x_{ij}$$

$$= f(x) + r_i\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + s_j\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = f(x) + r_ia_i + s_jb_j.$$

Vì $r_ia_i + s_jb_j$ là hằng số nên f(x) min khi và chỉ khi f'(x) min.

1.5.2. Định lý: (tiêu chuẩn tối ưu)

Giả sử $x^o = \left(x^o_{ij}\right)_{m\times n}$ là một phương án cơ bản mà tất cả các ô chọn đều có cước phí bằng 0. Khi đó, nếu tất cả các ô loại đều có cước phí không âm thì $\left(x^o_{ij}\right)_{m\times n}$ là phương án tối ưu.

<u>Chứng minh</u>

Vì các ô chọn đều có cước phí bằng 0 nên $f(x^o) = 0$. Giả sử $x = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ là một phương án bất kỳ của bài toán. Khi đó $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq 0 = f(x^o)$. Vậy $x^o = \left(x^o_{ij}\right)_{m\times n}$ là phương án tối ưu.

1.5.3. Thuật toán " Quy 0 cước phí các ô chọn "

❖ *Bước 1* : Tìm PACB ban đầu để xuất phát.

- ♦ Tìm 1 PACB ban đầu bằng phương pháp cực tiểu cước phí hoặc phương pháp Folgels.
- ♦ Nếu PACB ban đầu có đủ m+n-1 ô thì thì sang bước 2; nếu có ít hơn n+m-1 ô thì bổ sung thêm " ô chọn 0" cho đủ rồi sang bước 2.

❖ *Bước 2* : Quy 0 cước phí các ô chọn.

- ♦ Lập một hệ gồm m+n-1 phương trình tuyến tính

  $c_{ij} + r_i + s_j = 0$, $\forall(i,j)$ là ô chọn (hệ này có m+n ẩn)
- ♦ Tìm một nghiệm của hệ trên ta được $r_1, r_2, \ldots, r_m$; $s_1, s_2, \ldots, s_n$ rồi thay vào bảng để tính lại cước phí mới $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$.

❖ *Bước 3* : Kiểm tra tính tối ưu

- ♦ Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn, mà các ô loại đều có cước phí không âm thì phương án đang xét là tối ưu.
- ♦ Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn mà có ít nhất một ô loại có cước phí âm, thì phương án đang xét không tối ưu. Ta chuyển sang bước 4.

❖ *Bước 4* : Xây dựng phương án mới tốt hơn

- ♦ *Tìm ô đưa vào*: Ô đưa vào là ô có cước phí âm nhỏ nhất trong các ô loại; giả sử đó là ô (i*, j*).
- ♦ *Tìm vòng điều chỉnh*: Bổ sung (i*, j*) vào m + n – 1 ô chọn ban đầu sẽ xuất hiện vòng duy nhất là V gọi là vòng điều chỉnh. (theo tính chất 2)
- ♦ *Phân ô chẵn lẻ của vòng V* : Ta đánh số thứ tự các ô của vòng V bắt đầu từ ô (i*, j*), ô này được đánh số 1. Khi đó, V được phân hoạch thành hai tập:

  V^C là tập các ô có số thứ tự chẵn

  V^L là tập các ô có số thứ tự lẻ
- ♦ *Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh*: Nếu $x_{i^oj^o} = \min\left\{x_{ij} / (i,j) \in V^C\right\}$ thì (i^o, j^o) là ô đưa ra và $x_{i^oj^o}$ là lượng điều chỉnh. Tức là, trong các ô có số thứ tự chẵn, ô

nào đã phân ít hàng nhất là ô đưa ra và lượng hàng ở ô đó chính là lượng điều chỉnh.

♦ *Lập phương án mới*: $X' = (x'_{ij})_{m\times n}$, với x'_{ij} được tính như sau

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^C \\ x_{ij} + x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^L \quad (**) \\ x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \end{cases}$$

Lúc này, ô (i*,j*) trở thành ô chọn, ô (i^o,j^o) trở thành ô loại. *Quay lại bước 2.*

Nhận xét:

♦ Ô (i^o,j^o) trước có $x_{i^0 j^0}$ tấn và là ô chẵn nên bị trừ đi $x_{i^0 j^0}$ tấn trở thành ô loại.

♦ Ô (i^*,j^*) trước là ô loại và là ô lẻ (ô số 1) nên cộng vào $x_{i^0 j^0}$ tấn trở thành ô chọn.

♦ Vì $x_{i^o j^o}$ là nhỏ nhất trong các x_{ij} nên theo (**) ta được $x'_{ij} \geq 0$, do đó $(x'_{ij})_{m\times n}$ là phương án.

♦ Mỗi hàng hoặc cột vòng V đi qua đều có 1 ô chẵn và một ô lẻ nên tổng $\sum_i x_{ij}$ và $\sum_j x_{ij}$ vẫn không đổi.

♦ Phương án $(x'_{ij})_{m\times n}$ là cơ bản vì các ô chọn không tạo thành vòng (T/C 2).

♦ Phương án này tốt hơn vì đã loại ra một ô có cước phí 0 và thay vào ô có cước phí < 0.

Ví dụ 5 Giải bài toán vận tải cân bằng thu phát trong ví dụ 4 bằng thuật toán "qui-0 cước các ô chọn".

Giải

Bước 1 PACB ban đầu đã tìm được như trong ví dụ 4.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50	
A_1 : 70	2 × 60	3	1 × 10	$r_1 = 0$
A_2 : 40	5	2 × 0	3 × 40	$r_2 = -2$
A_3 : 20	5	2 × 20	6	$r_3 = -2$
	$s_1 = -2$	$s_2 = 0$	$s_3 = -1$	

Bước 2 Qui 0 cước phí : $\begin{cases} r_1 + s_1 + 2 = 0 \\ r_1 + s_3 + 1 = 0 \\ r_2 + s_2 + 2 = 0 \\ r_2 + s_3 + 3 = 0 \\ r_3 + s_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -2 \\ r_3 = -2 \\ s_1 = -2 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = -1 \end{cases}$ (cho $r_1 = 0$ từ đó tính các ẩn còn lại)

Tính lại cước phí các ô loại

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 70	0 × 60	3	0 × 10
A_2 : 40	1	0 × 0	0 × 40
A_3 : 20	1	0 × 20	3

Bước 3 Các ô loại đều có cước phí không âm nên phương án đang xét là tối ưu.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 70	2 / 60	3 / 0	1 / 10
A_2 : 40	5 / 0	2 / 0	3 / 40
A_3 : 20	5 / 0	2 / 20	6 / 0

Tổng cước phí là 290.

❖ *Nhận xét*: Trong bước "qui 0 cước phí", ta có thể cho một ẩn bằng 0 rồi dựa vào các ô chọn để tính các ẩn còn lại sau cho *các ô chọn* đều có cước phí bằng 0.

Ví dụ 6 Giải bài toán vận tải cân bằng thu phát sau:

Thu / Phát	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30
A_1 : 100	2	1	4	3
A_2 : 80	5	3	2	6
A_3 : 20	6	2	1	5

Giải

Bước 1 Ta tìm phương án cơ bản ban đầu của bài toán bằng phương pháp Folgels.

Thu / Phát		B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	Hiệu số lần 1	Hiệu số lần 1	Hiệu số lần 3
A_1 : 100 (100-60 =40)		2 × 60	1 × 40	4	3	1	2 (max)	
A_2 : 80		5	3 × 30	2 × 20	6 × 30	1	1	1
A_3 : 20		6	2	1 × 20	5	1	1	1 (max)
Hiệu số	lần 1	3 (max)	1	1	2			
	lần 2		1	1	2(max)			
	lần 3		1	1	1			

- Tính các hiệu số hàng cột lần 1 ta thấy giá trị lớn nhất ở cột B_1. Phân phối tối đa vào ô (1,1) 60 tấn , điểm phát A_1 chỉ còn 40 tấn , xóa cột B_1.
- Tính các hiệu số hàng cột lần 2 ta thấy giá trị lớn nhất ở hàng A_1 và cột B_4. Chọn hàng A_1 và phân phối tối đa vào ô (1,2) 40 tấn , điểm thu B_2 chỉ còn cần 30 tấn , xóa hàng A_1.
- Tính các hiệu số hàng cột lần 3 ta thấy tất cả các hiệu số đều bằng 1. Chọn hàng A_3 và phân phối tối đa vào ô (3,3) 20 tấn , điểm thu B_3 chỉ còn cần 20 tấn, xóa hàng A_3.
- Còn lại 3 ô ở hàng A_2 ta lần lượt phân phối vào ô (2,3) 20 tấn, ô (2,2) 30 tấn, ô (2,4) 30 tấn. Vậy ta được PACB ban đầu như trong bảng.

Bước 2 Qui 0 cước phí

Thu / Phát	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100 (100-60 =40)	2 × 60	1 × 40	4	3	$r_1 = 2$
A_2 : 80	5	3 × 30	2 × 20	6 × 30	$r_2 = 0$
A_3 : 20	6	2	1 × 20	5	$r_3 = 1$
	$s_1 = -4$	$s_2 = -3$	$s_3 = -2$	$s_4 = -6$	

- Từ hàng 2 cho $r_2 = 0$ tính được $s_2 = -3$, $s_3 = -2$, $s_4 = -6$; $s_3 = -2 \Rightarrow r_3 = 1$; $s_2 = -3 \Rightarrow r_1 = 2$; $r_1 = 2 \Rightarrow s_1 = -4$.
- Tính lại cước phí tất cả các ô ta được :

Thu / Phát	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30
A_1 : 100 (100-60 =40)	0 × 60	0 × 40	4	-1 × Đưa vào
A_2 : 80	1	0 × 30	0 × 20	0 × Đưara 30
A_3 : 20	3	0	0 × 20	0

<u>*Bước 3*</u> Còn ô (1,4) có cước phí âm nên PACB hiện có chưa tối ưu.

<u>*Bước 4*</u> Đưa ô (1,4) vào ta được vòng V = {(1,2), (1,4), (2,2), (2,4)}

- Phân ô chẵn lẻ : V^C = {(1,2), (2,4)}, V^L = {(1,4), (2,2)}.
- Ô đưa ra là ô (2,4) và lượng điều chỉnh là 30.
- Lập phương án mới.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100 (100-60 =40)	0 × 60	0 × 10	4	-1 × 30	$r_1 = 0$
A_2 : 80	1	0 × 60	0 × 20	0 0	$r_2 = 0$
A_3 : 20	3	0	0 × 20	0	$r_3 = 0$
	$s_1 = 0$	$s_2 = 0$	$s_3 = 0$	$s_4 = 1$	

<u>*Bước 2*</u> Qui 0 cước phí

Từ hàng 1 cho $r_1 = 0$ tính được $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_4 = 1$; $s_2 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$; $r_2 = 0 \Rightarrow s_3 = 0$; $s_3 = 0 \Rightarrow r_3 = 0$; $r_3 = 0 \Rightarrow s_4 = 1$.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100 (100-60 =40)	0 × 60	0 × 10	4	0 × 30	$r_1 = 0$
A_2 : 80	1	0 × 60	0 × 20	1 0	$r_2 = 0$
A_3 : 20	3	0	0 × 20	1	$r_3 = 0$
	$s_1 = 0$	$s_2 = 0$	$s_3 = 0$	$s_4 = 1$	

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên PACB hiện có tối ưu. Vậy PATƯ của bài toán là

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \ f_{min} = 460$$

1. 6. THUẬT TOÁN THẾ VỊ

1.6.1 Cơ sở toán học của thuật toán.

Thuật toán thế vị được xây dựng dựa trên bài toán đối ngẫu và định lý độ lệch bù yếu . Do đó, để hiểu được cơ sở toán học của thuật toán, bạn đọc cần nắm vững qui tắc thành lập bài toán đối ngẫu và định lý độ lệch bù yếu.

Xét bài toán vận tải (P):

$$(1)\quad f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

$$(3)\quad x_{ij} \geq 0\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán này là (D):

$$(1)\quad g(u,v) = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max$$

$$(2)\quad u_i + v_j \leq c_{ij},\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$$

$$(3)\ u_i,\ v_j \text{ tùy ý } \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$$

Cặp ràng buộc đối ngẫu : $x_{ij} \geq 0 \leftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij}$

Theo định lý độ lệch bù yếu thì $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ và $(U,V) = (u_i,\ v_j)$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ là PATƯ của (P) và (D) khi và chỉ khi

$$x_{ij}(u_i + v_j - c_{ij}) = 0\ ,\ \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$$

Xét bài toán dạng bảng như sau:

Thu / phát	B_1 b_1	B_2 b_2	...	B_j b_j	...	B_n b_n	
$A_1 : a_1$	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	u_1
$A_2 : a_2$	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	u_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	
$A_i : a_i$	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	u_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	
$A_m : a_m$	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	u_m
	v_1	v_2		v_j		v_n	

Như vậy, ta cần tìm hệ thống các thế vị hàng u_i, và thế vị cột v_j sao cho :

- ♦ Tại các ô chọn mà $x_{ij} > 0$ thì $u_i + v_j - c_{ij} = 0$
- ♦ Tại các ô còn lại $u_i + v_j - c_{ij} \le 0$

❖ Suy ra, ***dấu hiệu tối ưu*** là $u_i + v_j - c_{ij} \le 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$

Cách tính u_i , v_j ở đây cũng tương tự như cách tính r_i, s_j trong thuật toán " qui 0 cước phí các ô chọn". Tức là ta có thể cho một ẩn u_{i^o} hoặc v_{j^o} nào đó bằng 0 rồi dựa vào các ô chọn có $x_{ij} > 0$ để tính các ẩn còn lại sao cho $u_i + v_j - c_{ij} = 0$. Tiếp theo tính $\boldsymbol{k_{ij}} \overset{\text{đặt}}{=} \boldsymbol{u_i + v_j - c_{ij}}$ cho tất cả các ô còn lại rồi kiểm tra tính tối ưu.

- ♦ Nếu $k_{ij} \le 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ thì PACB hiện có tối ưu.
- ♦ Nếu tồn tại ô (i,j) nào đó thỏa $k_{ij} > 0$ thì PACB hiện có không tối ưu. Chọn ô có k_{ij} dương lớn nhất để đưa vào và các bước tiếp theo tương tư như thuật toán thuật toán "qui 0 cước phí các ô chọn".

1.6.2 Thuật toán thế vị

❖ *Bước 1* : Tìm PACB ban đầu để xuất phát.

- ♦ Tìm 1 PACB ban đầu bằng phương pháp cực tiểu cước phí hoặc phương pháp Folgels.
- ♦ Nếu PACB ban đầu có đủ m+n-1 ô thì thì sang bước 2; nếu có ít hơn n+m-1 ô thì bổ sung thêm " ô chọn 0" cho đủ rồi sang bước 2.

❖ *Bước 2* : Tìm hệ thống thế vị hàng, thế vị cột.

- ♦ Dựa vào các ô chọn có $x_{ij} > 0$ cho một ẩn u_{i^o} hoặc v_{j^o} nào đó bằng 0 rồi tính các ẩn còn lại sao cho các ô đó đều thỏa $u_i + v_j - c_{ij} = 0$.
- ♦ Tính $\boldsymbol{k_{ij}} \overset{\text{đặt}}{=} \boldsymbol{u_i + v_j - c_{ij}}$ ở tất cả các ô còn lại.

c_{ij}	k_{ij}
	x_{ij}

❖ *Bước 3* : Kiểm tra tính tối ưu

- ♦ Nếu $\boldsymbol{k_{ij}} \le 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ thì PACB hiện có tối ưu.
- ♦ Nếu tồn tại ô (i,j) nào đó thỏa $\boldsymbol{k_{ij}} > 0$ thì PACB hiện có không tối ưu. Sang bước 4.

Bước 4 : Xây dựng phương án mới tốt hơn

- ♦ *Tìm ô đưa vào*: Ô đưa vào là ô có $\boldsymbol{k_{ij}}$ dương lớn nhất ; giả sử đó là ô (i*, j*).
- ♦ *Tìm vòng điều chỉnh*: Bổ sung (i*, j*) vào m + n – 1 ô chọn ban đầu sẽ xuất hiện vòng duy nhất là V gọi là vòng điều chỉnh. (theo tính chất 2)
- ♦ *Phân ô chẵn lẻ của vòng V* : Ta đánh số thứ tự các ô của vòng V bắt đầu từ ô (i*, j*), ô này được đánh số 1. Khi đó, V được phân hoạch thành hai tập:

  V^C là tập các ô có số thứ tự chẵn

  V^L là tập các ô có số thứ tự lẻ

- *Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh*: Nếu $x_{i^o j^o} = \min\{x_{ij} / (i,j) \in V^C\}$ thì (i^o,j^o) là ô đưa ra và $x_{i^o j^o}$ là lượng điều chỉnh. Tức là, trong các ô có số thứ tự chẵn, ô nào đã phân ít hàng nhất là ô đưa ra và lượng hàng ở ô đó chính là lượng điều chỉnh.
- *Lập phương án mới*: $X' = (x'_{ij})_{m\times n}$, với x'_{ij} được tính như sau

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^C \\ x_{ij} + x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^L \quad (**) \\ x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \end{cases}$$

Lúc này, ô (i^*,j^*) trở thành ô chọn, ô (i^o,j^o) trở thành ô loại. *Quay lại bước 2.*

<u>*Ví dụ7*</u> Giải bài toán vận tải trong ví dụ 6 bằng thuật toán thế vị.

<u>*Giải*</u>

<u>*Bước 1*</u> Phương án cực biên ban đầu được tìm như trong ví dụ 6.

<u>*Bước 2*</u> Tìm hệ thống thế vị hàng và thế vị cột.

Phát \ Thu	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100	2 × 60	1 × 40	4	3	$u_1 = -2$
A_2 : 80	5	3 × 30	2 × 20	6 × 30	cho $u_2 = 0$
A_3 : 20	6	2	1 × 20	5	$u_3 = -1$
	$v_1 = 4$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 6$	

- Từ hàng 2 cho $u_2 = 0$ tính được $v_2 = 3$, $v_3 = 2$, $v_4 = 6$; $v_3 = 2 \Rightarrow u_3 = -1$; $v_2 = 3 \Rightarrow u_1 = -2$; $u_1 = -2 \Rightarrow v_1 = 4$.
- Tính $\boldsymbol{k_{ij}} = u_i + v_j - c_{ij}$, ghi vào góc trên bên phải mỗi ô ta được :

Phát \ Thu	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100 (100-60 =40)	2 × 0; 60	1 × 0; 40	4 -4	3 × 1; Đưa vào	$u_1 = -2$
A_2 : 80	5 -1	3 × 0; 30	2 × 0; 20	6 × 0; Đưa ra 30	$u_2 = 0$
A_3 : 20	6 -3	2 0	1 × 0; 20	5 0	$u_3 = -1$
	$v_1 = 4$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 6$	

<u>*Bước 3*</u> Còn ô (1,4) có $k_{14} = 1 > 0$ nên PACB hiện có chưa tối ưu.

<u>*Bước 4*</u> Đưa ô (1,4) vào ta được vòng V = {(1,2), (1,4), (2,2), (2,4)}

- Phân ô chẵn lẻ : $V^C = \{(1,2), (2,4)\}$, $V^L = \{(1,4), (2,2)\}$.
- Ô đưa ra là ô (2,4) và lượng điều chỉnh là 30.
- Lập phương án mới.

Phát \ Thu	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100	2 × 60	1 × 10	4	3 × 30	cho $u_1 = 0$
A_2 : 80	5	3 × 60	2 × 20	6 0	$u_2 = 2$
A_3 : 20	6	2	1 × 20	5	$u_3 = 1$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 3$	

Bước 2 Tìm hệ thống thế vị hàng và thế vị cột.

Từ hàng 1 cho $u_1 = 0$ tính được $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $v_4 = 3$; $v_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 2$; $u_2 = 2 \Rightarrow v_3 = 0$; $v_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 1$. Tính $\boldsymbol{k_{ij}} = u_i + v_j - c_{ij}$, ghi vào góc trên bên phải mỗi ô ta được

Phát \ Thu	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30	
A_1 : 100 (100-60 =40)	2 × 0 60	1 × 0 10	4	3 × 0 30	$u_1 = 0$
A_2 : 80	5 -1	3 × 0 60	2 × 0 20	6 -1 0	$u_2 = 2$
A_3 : 20	6 -3	2 0	1 × 0 20	5 -1	$u_3 = 1$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 3$	

Tất cả các ô đều có $k_{ij} \leq 0$ nên PACB hiện có tối ưu. Vậy PATƯ của bài toán là

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 8 Giải bài toán vận tảicân bằng thu phát sau:

Phát \ Thu	B_1 80	B_2 20	B_3 60
A_1 : 50	5	4	1
A_2 : 40	3	2	6
A_3 : 70	7	9	11

Giải

Bước 1 Ta tìm phương án cơ bản ban đầu của bài toán bằng phương pháp Folgels.

Thu / Phát		B_1 80	B_2 20	B_3 60 (60-50=10)	Hiệu số lần 1	Hiệu số lần 2	Hiệu số Lần 3
A_1 : 50		5	4	1 50	3		
A_2 : 40 (40-20=20) (20-10=10)		3 10	2 20	6 10	1	1	3
A_3 : 70		7 70	9	11	2	2	4
Hiệu số	lần 1	2	2	5(max)			
	lần 2	4	7(max)	5			
	lần 2	4		5(max)			

- ♦ Tính các hiệu số hàng cột lần 1 ta thấy giá trị lớn nhất ở cột B_3. Phân phối tối đa vào ô (1,3) 50 tấn , điểm thu B_3 chỉ còn cần 10 tấn, xóa hàng A_1 .
- ♦ Tính các hiệu số hàng cột lần 2 ta thấy giá trị lớn nhất ở cột B_2. Phân phối tối đa vào ô (2,2) 20 tấn , điểm phát A_2 chỉ còn 20 tấn, xóa cột B_2 .
- ♦ Tính các hiệu số hàng cột lần 3 ta thấy giá trị lớn nhất ở cột B_3. Phân phối tối đa vào ô (2,3) 10 tấn , điểm phát A_2 chỉ còn 10 tấn, xóa cột B_3 .
- ♦ Đến đây chỉ còn hai ô ở cột 1, ta phân phối vào ô (2,1) 10 tấn và ô (3,1) 70 tấn. Vậy ta có PACB ban đầu .

Bước 2 *Qui 0 cước phí* :

Từ hàng 2 cho $r_2 = 0$ suy ra $s_1 = -3$, $s_2 = -2$, $s_3 = -6$; $s_3 = -6 \Rightarrow r_1 = 5$; $s_1 = -3 \Rightarrow r_3 = -4$

Thu / Phát	B_1 80	B_2 20	B_3 60	
A_1 : 50	5	4	1 × 50	$r_1 = 5$
A_2 : 40	3 × 10	2 × 20	6 × 10	cho $r_2 = 0$
A_3 : 70	7 × 70	9	11	$r_3 = -4$
	$s_1 = -3$	$s_2 = -2$	$s_3 = -6$	

Tính lại cước phí tất cả các ô ta được

Thu / Phát	B_1 80	B_2 20	B_3 60
A_1 : 50	7	7	0 × 50
A_2 : 40	0 × 10	0 × 20	0 × 10
A_3 : 70	0 × 70	3	1

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên PACB hiện có tối ưu. Vậy PATƯ của bài toán là

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 10 & 20 & 10 \\ 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Nhận xét</u>

i) Về mặt cơ sở toán học thì thuật toán "qui 0 cước phí" dễ hiểu hơn thuật toán thế vị. Đối với thuật toán thế vị, cần nắm vững lý thuyết đối ngẫu thì mới có thể hiểu được cơ sở toán học của thuật toán.

ii) Về mức độ phức tạp trong tính toán thì hai thuật toán này như nhau. Vai trò của các r_i và s_j tương tự như các u_i và v_j. Tuy nhiên, trong mỗi vòng tính toán của thuật toán, thì thuật toán "qui 0 cước phí" phải lập nhiều hơn thuật toán thế vị 1 bảng.

§ 2 .CÁC DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

2.1. Bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại.

2.1.1 Nội dung bài toán:

(1) $f(x) = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = \overline{1,n}) \end{cases}$

(3) $x_{ij} \geq 0 \;\; \forall$ i,j.

Có nhiều bài toán trong thực tế không phải là bài toán vận tải nhưng có dạng giống như bài toán vận tải, chỉ khác là hàm mục tiêu cực đại. Bài toán này được giải bình thường như các bài toán vận tải $f(x) \rightarrow \min$ với một số lưu ý sau :

- Khi tìm PACB ban đầu thì ưu tiên phân phối vào ô có cước phí lớn nhất (cực đại cước phí).
- Sau khi "qui 0 cước phí các ô chọn" thì phương án cơ bản đang có tối ưu nếu tất cả các ô loại đều có cước phí đều ≤ 0.
- Khi tìm ô đưa vào thì chọn ô có cước phí dương lớn nhất .

2.1.2. **Thuật toán "** ***quy 0 cước phí các ô chọn*** **" giải bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại:**

- *Bước 1* : Tìm PACB ban đầu để xuất phát bằng phương pháp ***cực đại cước phí***. Ý tưởng phương pháp này là ưu tiên phân phối nhiều nhất vào các ô có cước phí lớn nhất.

Giả sử trong ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$, c_{rs} là ***lớn nhất*** trong các c_{ij}. Khi đó, ta phân phối tối đa vào ô (r,s), cụ thể: $x_{rs} = \begin{cases} a_r & \text{nếu } a_r < b_s & \text{(TH1)} \\ b_s & \text{nếu } a_r > b_s & \text{(TH2)} \\ a_r & \text{nếu } a_r = b_s & \text{(TH3)} \end{cases}$

- Trong trường hợp 1, điểm phát A_r đã phát hết hàng nên có thể xóa đi hàng A_r của bảng; ở điểm thu B_s chỉ còn cần $(b_s - a_r)$ tấn hàng.
- Trong trường hợp 2, điểm thu B_s đã nhận đủ hàng, nên có thể xóa đi cột B_s của bảng và ở điểm phát A_r chỉ còn lại $(a_r - b_s)$ tấn hàng.
- Trong trường hợp 3, điểm phát A_r đã phát hết hàng và điểm thu B_s đã nhận đủ hàng nên có thể xóa đi hàng A_r và cột B_s của bảng.

- Trong bảng còn lại với số hàng và cột ít hơn, ta lại tiếp tục phân phối như trên cho đến khi hết hàng.
- Nếu PACB ban đầu có đủ m+n-1 ô thì thì sang bước 2; nếu có ít hơn n+m-1 ô thì bổ sung thêm " ô chọn 0" cho đủ m + n –1 không tạo thành vòng rồi sang bước 2.

❖ *Bước 2* : Quy 0 cước phí các ô chọn.

- Lập một hệ gồm m+n-1 phương trình tuyến tính

$$c_{ij} + r_i + s_j = 0 \quad , \quad \forall(i,j) \text{ là ô chọn} \quad (\text{hệ này có } m+n \text{ ẩn})$$

- Tìm một nghiệm của hệ trên ta được $r_1, r_2, ..., r_m$; $s_1, s_2, ..., s_n$ rồi thay vào bảng để tính lại cước phí mới $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$.

❖ *Bước 3* : Kiểm tra tính tối ưu

- Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn, mà các ô loại đều có cước phí ***không dương*** thì phương án đang xét là tối ưu.
- Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn mà ***có ít nhất một ô loại có cước phí dương***, thì phương án đang xét không tối ưu. Ta chuyển sang bước 4.

❖ *Bước 4* : Xây dựng phương án mới tốt hơn

- *Tìm ô đưa vào*: Ô đưa vào là ***ô có cước phí dương lớn nhất*** trong các ô loại; giả sử đó là ô (i*, j*).
- *Tìm vòng điều chỉnh*: Bổ sung (i*, j*) vào m + n – 1 ô chọn ban đầu sẽ xuất hiện vòng duy nhất là V gọi là vòng điều chỉnh. (theo tính chất 2)
- *Phân ô chẵn lẻ của vòng V* : Ta đánh số thứ tự các ô của vòng V bắt đầu từ ô (i*, j*), ô này được đánh số 1. Khi đó, V được phân hoạch thành hai tập:

  V^C là tập các ô có số thứ tự chẵn

  V^L là tập các ô có số thứ tự lẻ

- *Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh*: Nếu $x_{i^o j^o} = \min\{x_{ij} / (i,j) \in V^C\}$ thì (i^o, j^o) là ô đưa ra và $x_{i^o j^o}$ là lượng điều chỉnh. Tức là, trong các ô có số thứ tự chẵn, ô nào đã phân ít hàng nhất là ô đưa ra và lượng hàng ở ô đó chính là lượng điều chỉnh.
- *Lập phương án mới*: $X' = (x'_{ij})_{m \times n}$, với x'_{ij} được tính như sau

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^C \\ x_{ij} + x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^L \quad (**) \\ x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \end{cases}$$

Lúc này, ô (i*,j*) trở thành ô chọn, ô (i^o, j^o) trở thành ô loại. *Quay lại bước 2.*

<u>Ví dụ 1</u> Một xí nghiệp có 200 công nhân gồm : 50 loại A_1 , 70 loại A_2, 80 loại A_3. Xí nghiệp lại có 200 máy gồm : 40 loại B_1, 60 loại B_2, 30 loại B_3, 70 loại B_4 .Khi sản xuất mỗi công nhân sử dụng một máy để tạo ra cùng một loại sản phẩm. Năng suất của mỗi loại công nhân khi sử dụng mỗi loại máy được cho trong bảng 1 (sản phẩm/ giờ). Hỏi phải phân công lao động như thế nào để trong 1 giờ tạo ra được nhiều sản phẩm nhất?

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70
A_1: 50	8	5	5	3
A_2: 70	6	9	8	7
A_3: 80	4	6	6	5

Bảng 1

Gọi x_{ij} là số công nhân loại A_i được phân công sử dụng máy B_j ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$).

Ta có mô hình toán học :

(1) $f(x) = 8x_{11}+5x_{12}+5x_{13}+3x_{14}+6x_{21}+9x_{22}+8x_{23}+7x_{24}+4x_{31}+6x_{32}+6x_{33}+5x_{34} \to \max$

$$
(2)\ \begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 50\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 70\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 80\\
x_{11}+x_{21}+x_{31} = 40\\
x_{12}+x_{22}+x_{32} = 60\\
x_{13}+x_{23}+x_{33} = 30\\
x_{14}+x_{24}+x_{34} = 70
\end{cases}
$$

(3) $x_{ij} \ge 0$ $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$ và x_{ij} nguyên

Bài toán này có dạng bài toán vận tải với hàm mục tiêu cực đại với bảng vận tải là bảng 1.(bạn có thể giải bài toán này bằng kiến thức có được ở chương 1 và chương 2 kết hợp việc sử dụng các phần mềm máy tính)

Bước 1 Tìm PACB ban đầu bằng phương pháp "cực đại cước phí".

- Phân vào ô (2,2) 60 tấn , điểm phát A_2 chỉ còn 10 tấn, xóa cột B_2.
- Phân vào ô (1,1) 40 tấn , điểm phát A_1 chỉ còn 10 tấn, xóa cột B_1.
- Phân vào ô (2,3) 10 tấn , điểm thu B_3 chỉ còn cần 20 tấn, xóa hàng A_2.
- Phân vào ô (3,3) 20 tấn , điểm phát A_3 chỉ còn 60 tấn, xóa cột B_3.
- Phân vào ô (3,4) 60 tấn , ô (1,3) 10 tấn.

Ta được PACB ban đầu có đủ m + n – 1 =3+4-1 = 6 ô chọn trong bảng sau :

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70	
A_1: 50	8 × 40	5	5	3 × 10	cho $r_1 = 0$
A_2: 70	6	9 × 60	8 × 10	7	$r_2 = -4$
$A_3 = 80$	4	6	6 × 20	5 × 60	$r_3 = -2$
	$s_1 = -8$	$s_2 = -5$	$s_3 = -4$	$s_4 = -3$	

<u>*Bước 2*</u> Qui 0 cước phí các ô chọn : Cho $r_1 = 0$ tính ra được s_1=-8 ,s_4 =-3; s_4 =-3 $\Rightarrow$ r_3 = -2 ; r_3 = -2 $\Rightarrow$ s_3 = -4 ; s_3 = -4$\Rightarrow$ r_2 =-4 ; r_2 = -4$\Rightarrow$ s_2 =-5.

Tính lại cước phí các ô theo công thức $c'_{ij} = r_i + s_j + c_{ij}$ ta được .

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70
A_1: 50	0 × 40	0	1 × Đưa vào	0 × 10
A_2: 70	-6	0 × 60	0 × 10	0
$A_3 = 80$	-6	-1	0 × 20	0 × 60

<u>*Bước 3*</u> Kiểm tra tính tối ưu:
Còn ô (1,3) có cước phí dương nên PACB hiện có chưa tối ưu.

<u>*Bước 4*</u> Xây dựng phương án mới tốt hơn .

- Đưa vào ô (1,3) ta được vòng $V = \{(1,3),(1,4),(3,4),(3,3)\}$
- Phân ô chẵn lẻ : $V^C = \{(1,4),(3,3)\}$, $V^L = \{(1,3),(3,4)\}$
- Ô đưa ra là ô (1,4) , lượng điều chỉnh là $x_{14} = 10$.
- Các ô (1,3) ,(3,4) cộng thêm 10 tấn; các ô (1,4) ,(3,3) tính bớt 10 tấn. Ta được phương án mới :

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70	
A_1: 50	0 × 40	0	1 × 10	0 0	$r_1 = -1$
A_2: 70	-6	0 × 60	0 × 10	0	$r_2 = 0$
A_3 : 80	-6	-1	0 × 10	0 × 70	$r_3 = 0$
	$s_1 = 1$	$s_2 = 0$	$s_3 = 0$	$s_4 = 0$	

Bước 2 Qui 0 cước phí các ô chọn.

Từ cột B_3 cho $s_3 = 0$ tính được $r_1 = -1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$; $r_3 = 0 \Rightarrow s_4 = 0$; $r_2 = 0 \Rightarrow s_2 = 0$; $r_1 = -1 \Rightarrow s_1 = 1$. Tính lại cước phí tất cả các ô ta được.

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70
A_1: 50	0 × 40	-1	0 × 10	-1
A_2: 70	-5	0 × 60	0 × 10	0
A_3 = 80	-5	-1	0 × 10	0 × 70

Mọi ô đều có cước phí ≤ 0 nên PACB đang có tối ưu. Vậy PATƯ của bài toán là:

Máy / C.nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 30	B_4 70
A_1: 50	8 40	5	5 10	3
A_2: 70	6	9 60	8 10	7
A_3 : 80	4	6	6 10	5 70

$$f_{max} = 8.40 + 9.60 + 5.10 + 8.10 + 6.10 + 5.70 = 1400$$

2.1.3. Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại

- *Bước 1* : Tìm PACB ban đầu để xuất phát bằng phương pháp ***cực đại cước phí***. Ý tưởng phương pháp này là ưu tiên phân phối nhiều nhất vào các ô có cước phí lớn nhất.

Giả sử trong ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$, c_{rs} là ***lớn nhất*** trong các c_{ij}. Khi đó, ta phân phối tối đa vào ô (r,s), cụ thể: $x_{rs} = \begin{cases} a_r & \text{nếu } a_r < b_s \quad \text{(TH1)} \\ b_s & \text{nếu } a_r > b_s \quad \text{(TH2)} \\ a_r & \text{nếu } a_r = b_s \quad \text{(TH3)} \end{cases}$

- Trong trường hợp 1, điểm phát A_r đã phát hết hàng nên có thể xóa đi hàng A_r của bảng; ở điểm thu B_s chỉ còn cần $(b_s - a_r)$ tấn hàng.
- Trong trường hợp 2, điểm thu B_s đã nhận đủ hàng, nên có thể xóa đi cột B_s của bảng và ở điểm phát A_r chỉ còn lại $(a_r - b_s)$ tấn hàng.
- Trong trường hợp 3, điểm phát A_r đã phát hết hàng và điểm thu B_s đã nhận đủ hàng nên có thể xóa đi hàng A_r và cột B_s của bảng.

- ♦ Trong bảng còn lại với số hàng và cột ít hơn, ta lại tiếp tục phân phối như trên cho đến khi hết hàng.
- ♦ Nếu PACB ban đầu có đủ m+n-1 ô thì thì sang bước 2; nếu có ít hơn n+m-1 ô thì bổ sung thêm " ô chọn 0" cho đủ m + n –1 không tạo thành vòng rồi sang bước 2.

❖ *Bước 2* : Tìm hệ thống thế vị hàng, thế vị cột.

- ♦ Dựa vào các ô chọn có $x_{ij} > 0$ cho một ẩn u_{i^o} hoặc v_{j^o} nào đó bằng 0 rồi tính các ẩn còn lại sao cho các ô đó đều thỏa $u_i + v_j - c_{ij} = 0$.
- ♦ Tính $\boldsymbol{k_{ij}} \overset{\text{đặt}}{=} \boldsymbol{u_i + v_j - c_{ij}}$ ở tất cả các ô còn lại.

c_{ij}	k_{ij}
	x_{ij}

❖ *Bước 3* : Kiểm tra tính tối ưu

- ♦ Nếu $\boldsymbol{k_{ij} \geq 0}$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ thì PACB hiện có tối ưu.
- ♦ Nếu tồn tại ô (i,j) nào đó thỏa $\boldsymbol{k_{ij}} < 0$ thì PACB hiện có không tối ưu. Sang bước 4.

Bước 4 : Xây dựng phương án mới tốt hơn

- ♦ *Tìm ô đưa vào*: Ô đưa vào là ô có ***kij* bé nhất** ; giả sử đó là ô (i*, j*).
- ♦ *Tìm vòng điều chỉnh*: Bổ sung (i*, j*) vào m + n – 1 ô chọn ban đầu sẽ xuất hiện vòng duy nhất là V gọi là vòng điều chỉnh. (theo tính chất 2)
- ♦ *Phân ô chẵn lẻ của vòng V* : Ta đánh số thứ tự các ô của vòng V bắt đầu từ ô (i*, j*), ô này được đánh số 1. Khi đó, V được phân hoạch thành hai tập:

  V^C là tập các ô có số thứ tự chẵn

  V^L là tập các ô có số thứ tự lẻ
- ♦ *Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh*: Nếu $x_{i^o j^o} = \min\left\{x_{ij} / (i,j) \in V^C\right\}$ thì (i^o,j^o) là ô đưa ra và $x_{i^o j^o}$ là lượng điều chỉnh. Tức là, trong các ô có số thứ tự chẵn, ô nào đã phân ít hàng nhất là ô đưa ra và lượng hàng ở ô đó chính là lượng điều chỉnh.
- ♦ *Lập phương án mới*: $X' = \left(x'_{ij}\right)_{m\times n}$, với x'_{ij} được tính như sau

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^C \\ x_{ij} + x_{i^0 j^0} & \text{nếu } (i,j) \in V^L \quad (**) \\ x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \end{cases}$$

Lúc này, ô (i*,j*) trở thành ô chọn, ô (i^o,j^o) trở thành ô loại. *Quay lại bước 2.*

2.2. Các bài toán vận tải không cân bằng thu phát

2.2.1.Trường hợp tổng lượng hàng phát lớn hơn tổng thu: $\sum_{i=1}^{m} a_1 > \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$(1)\ f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$(2)\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & (i=\overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=\overline{1,n}) \end{cases}$$

$$(3)\ x_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j$$

Để giải bài toán này ta thêm điểm thu giả B_{n+1} với lượng hàng thu là $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Các ô trên cột ứng với điểm thu giả có cước phí đều bằng 0.

Khi tìm PACB ban đầu thì phân phối vào các ô chính trước, các ô trên cột thu giả khi còn thừa hàng mới phân vào.

Ví dụ 2 Giải bài toán vận tải (f $\to$ min) cho bởi bảng sau

Thu / Phát	B_1 20	B_2 60	B_3 60
A_1: 40	5	4	3
A_2: 50	4	3	5
A_3: 70	6	5	2

Ta có: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 50 + 70 = 160$, $\sum_{j=1}^{3} b_j = 20 + 60 + 60 = 140$

Lập thêm điểm thu giả B_4 với lượng hàng cần thu là $b_4 = 160 - 140 = 20$.

Thu / Phát	B_1 20	B_2 60	B_3 60	B_4 20
A_1: 40	5 × 20	4 × 10	3	0 × 10
A_2: 50	4	3 × 50	5	0
A_3: 70	6	5	2 × 60	0 × 10

Bước 1 Tìm PACB ban đầu bằng phương pháp cực tiểu cước phí như sau :

- Phân vào ô (3,3) 60 tấn, hàng A_3 chỉ còn lại 10 tấn, xóa cột B_3.
- Phân vào ô (2,2) 50 tấn, cột B_2 chỉ còn cần 10 tấn, xóa hàng A_2.
- Phân vào ô (1,2) 10 tấn, hàng A_1 chỉ còn 30 tấn , xóa cột B_2.
- Phân vào ô (1,1) 20 tấn, hàng A_1 chỉ còn 10 tấn , xóa cột B_1.

- Cuối cùng phân vào ô (1,4) 10 tấn, ô (3,4) 10 tấn. Ta được PACB ban đầu có đủ $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ ô chọn .

Bước 2 Qui 0 cước phí các ô chọn .

Thu / Phát	B_1 20	B_2 60	B_3 60	B_4 20	
A_1: 40	5 × 20	4 × 10	3	0 × 10	$r_1 = 0$
A_2: 50	4	3 × 50	5	0	$r_2 = 1$
A_3: 70	6	5	2 × 60	0 × 10	$r_3 = 0$
	$s_1 = -5$	$s_2 = -4$	$s_3 = -2$	$s_4 = 0$	

Từ hàng 1 cho $r_1 = 0$ ta tính được $s_1 = -5$, $s_2 = -4$, $s_4 = 0$; $s_2 = -4 \Rightarrow r_2 = 1$; $s_4 = 0 \Rightarrow r_3 = 0$; $r_3 = 0 \Rightarrow s_3 = -2$.

Tính loại cước phí các ô loại theo công thức $c'_{ij} = r_i + s_j + c_{ij}$ ta được

Thu / Phát	B_1 20	B_2 60	B_3 60	B_4 20
A_1: 40	0 × 20	0 × 10	1	0 × 10
A_2: 50	0	0 × 50	4	1
A_3: 70	1	1	0 × 60	0 × 10

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên PACB hiện có tối ưu. Vậy phương án tối ưu của bài toán đã cho là

Thu / Phát	B_1 20	B_2 60	B_3 60
A_1: 40	5 20	4 10	3
A_2: 50	4	3 50	5
A_3: 70	6	5	2 60

$$f_{min} = 5.20 + 4.10 + 3.50 + 2.60 = 410$$

2.2.2.Trường hợp tổng lượng hàng phát nhỏ hơn tổng thu: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$(1)\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$(2)\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} a_i (\overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

$$(3)\ x_{ij} \ge 0 \quad \forall\, i,j$$

Để giải bài toán này ta thêm điểm phát giả A_{n+1} với số hàng phát là $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Các ô trên hàng ứng với ẩn giả có cước phí đều bằng 0. Tương tự trường hợp cung vượt cầu, khi tìm PACB ban đầu thì phân phối vào các ô chính trước .

Ví dụ 3 Giải bài toán vận tải cho bởi bảng sau. ($f \rightarrow \min$)

Thu / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50	B_4 40
A_1: 30	8	3	5	2
A_2: 40	2	4	3	7
A_3: 60	5	6	4	1

Ta có : $\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 40 + 60 = 130$, $\sum_{j=1}^{4} b_j = 20 + 30 + 50 + 40 = 140$.

Lập thêm điểm phát giả A_4 với lượng hàng phát là $a_4 = 140 - 130 = 10$.

Thu / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50	B_4 40
A_1: 30	8	3 × 30	5	2 ×
A_2: 40	2 × 20	4	3 × 20	7
A_3: 60	5	6	4 × 20	1 × 40
A_4: 10	0	0	0 × 10	0

Bước 1 Tìm PACB ban đầu bằng phương pháp cực tiểu cước phí như sau :

- Phân vào ô (3,4) 40 tấn , điểm phát A_3 còn lại 20 tấn, xóa cột B_4.
- Phân vào ô (2,1) 20 tấn , điểm phát A_2 chỉ còn lại 20 tấn, xóa cột B_1.
- Phân vào ô (1,2) 30 tấn , xóa hàng A_1 và cột B_2.
- Phân vào ô (2,3) 20 tấn , ô (3,3) 20 tấn , ô (3,4)10 tấn. Số ô chọn là 6 ô nên ta bổ sung thêm ô (1,4) cho đủ 7 = 4 +4 – 1 ô.

Bước 2: Qui 0 cước cho các ô chọn

Thu / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50	B_4 40	
A_1 : 30	8	3 × 30	5	2 ×	r_1 = -5
A_2 : 40	2 × 20	4	3 × 20	7	r_2 = -3
A_3 : 60	5	6	4 × 20	1 × 40	r_3 = -4
A_4 : 10	0	0	0 × 10	0	r_4 = 0
	s_1 =1	s_2 = 2	s_3 = 0	s_4 = 3	

Từ cột B_3 cho $s_3 = 0$ tính được $r_4 = 0$, $r_3 = -4$, $r_2 = -3$; $r_3 = -4 \Rightarrow s_4 = 3$;
$s_4 = 3 \Rightarrow r_1 = -5$; $r_1 = -5 \Rightarrow s_2 = 2$; $r_2 = -3 \Rightarrow s_1 = 1$.
Tính lại cước phí các ô ta được .

Thu / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50	B_4 40
A_1 : 30	4	0 × 30	0	0 ×
A_2 : 40	0 × 20	3	0 × 20	7
A_3 : 60	2	4	0 × 20	0 × 40
A_4 : 10	1	2	0 × 10	3

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên PACB hiện có tối ưu.
Phương án tối ưu bài toán ban đầu là

Thu / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50	B_4 40
A_1: 30	8 / 20	3 / 0	5 / 20	2 / 0
A_2: 40	2 / 0	4 / 0	3 / 20	7 / 0
A_3: 60	5 / 0	6 / 0	4 / 10	1 / 0

$f_{\min} = 8\times 20 + 5\times 20 + 3\times 20 + 4\times 10 = 360$

2.3. Bài toán vận tải có ô cấm:

Trong thực tế vì lý do cầu, phà, đường sá bị hư hỏng, hoặc do vấn đề an ninh, hoặc do khoảng cách quá xa cần nhiều thời gian vận chuyển mà các điều kiện bảo quản hàng hóa không thực hiện được hay không kịp về mặt thời gian,....nên có một số tuyến đường không thể vận chuyển hàng qua được. Các tuyến đường này trên bảng vận tải đặc trưng bởi các ô không phân phối hàng vào được. Các ô này gọi là ô cấm.

Ngoài ra ô cấm còn xuất hiện trong bài toán vận tải không cân bằng thu phát với điều kiện một số trạm phát phải phát hết hàng (tổng phát > tổng thu) hoặc với điều kiện một số trạm thu nào đó phải thu đủ hàng (tổng phát < tổng thu).

Để giải bài toán vận tải các ô cấm, chúng ta đặt "cước phí" tại ô cấm là "M" đối với bài toán hàm mục tiêu cực tiểu ($f \longrightarrow \min$) và là "$-M$" đối với bài toán hàm mục tiêu cực đại ($f \longrightarrow \max$), với M là số dương lớn tùy ý, tiếp theo chúng ta áp dụng ***thuật toán thế vị*** hoặc ***thuật toán quy 0 cước phí ô chọn*** để giải.

<u>Ví dụ 4</u>

Một công ty ký hợp đồng giao cho khách hàng 5 sản phẩm loại A_1, 7 sản phẩm loại A_2, 8 sản phẩm loại A_3 trong thời gian 1 tháng. Công ty có 3 xí nghiệp I, II, III và xí nghiệp III không sản xuất được sản phẩm A_3. Năng lực sản xuất mỗi xí nghiệp I, II, III trong thời gian 1 tháng lần lượt là 9 sản phẩm, 6 sản phẩm, 5 sản phẩm. Lợi nhuận thu được trên mỗi sản phẩm do các xí nghiệp sản xuất ra được cho trong bảng sau (đơn vị tính: 20.000.000 đồng/sản phẩm).

X.Nghiệp / S.Phẩm	I 9	II 6	III 5
A_1: 5	8,5	6	7
A_2: 7	9	10	6,5
A_3: 8	6	7,5	Ô Cấm

Hỏi phải phân công các xí nghiệp sản xuất như thế nào để thực hiện được hợp đồng với lợi nhuận lớn nhất và cho biết số tiền lợi nhuận thu được đó?

Giải

Bài toán này có dạng là là bài toán vận tải cân bằng thu phát có ô cấm là (3,3). Vì là bài toán $f \to \max$ nên $c_{33} = -M$, với M là số dương lớn tùy ý.

X.Nghiệp / S.Phẩm	I 9	II 6	III 5
A_1: 5	8,5	6	7
A_2: 7	9	10	6,5
A_3: 8	6	7,5	-M

Lần lượt phân phối như sau: ô (2,2) 6 ; ô (2,1) 1; ô (1,1) 5; ô (3,1) 3; ô (3,3) 5

Sau khi phân phối xong ta được phương án cơ bản ban đầu không suy biến, tìm các thế vị hàng và các thế vị cột rồi tiếp theo tính $\boldsymbol{k_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}}$ ta được được:

X.Nghiệp / S.Phẩm	I 9	II 6	III 5	
A_1: 5	8,5 × 0 5	6 3,5	7 $-M-4,5$ Đưa vào	$u_1 = 2,5$
A_2: 7	9 × 0 1	10 × 0 6	6,5 $-M-3,5$	$u_2 = 3$
A_3: 8	6 × 0 3	7,5 $-0,5$	-M × 0 Đưa ra 5	$u_3 \overset{cho}{=} 0$
	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = -M$	

Ô (1,3) có $k_{13} = -M - 4,5 < 0$ nên phương án cơ bản hiện có không tối ưu.

Ô đưa vào là ô (1,3).

Vòng điều chỉnh là $V = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$, $V^C = \{(1,1),(3,3)\}, V^L = \{(3,1),(1,3)\}$.

Ô đưa ra là ô (3,3) và lượng điều chỉnh là $x_{33} = 5$. Lập phương án mới và tìm hệ thống thế vị mới ta được:

X.Nghiệp S.Phẩm	I 9	II 6	III 5	
A$_1$: 5	8,5 × 0 0	6 3,5	7 × 0 5	$u_1 = 8,5$
A$_2$: 7	9 × 0 1	10 × 0 Đưa ra 6	6,5 1	$u_2 = 9$
A$_3$: 8	6 × 0 8	7,5 $-0,5$ Đưa vào	-M $M+4,5$	$u_3 = 6$
	$v_1 \overset{Cho}{=} 0$	$v_2 = 1$	$v_3 = -1,5$	

Ô $(3,2)$ có $k_{32} = -1,5 < 0$ nên phương án cơ bản hiện có không tối ưu.

Ô đưa vào là ô $(3,2)$.

Vòng điều chỉnh là $V = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$, $V^C = \{(1,1),(3,3)\}, V^L = \{(3,1),(1,3)\}$.

Ô đưa ra là ô $(2,2)$ và lượng điều chỉnh là $x_{22} = 6$. Lập phương án mới và tìm hệ thống thế vị mới ta được:

X.Nghiệp S.Phẩm	I 9	II 6	III 5	
A$_1$: 5	8,5 × 0 0	6 4	7 × 0 5	$u_1 = 8,5$
A$_2$: 7	9 × 0 7	10 0,5 0	6,5 1	$u_2 = 9$
A$_3$: 8	6 × 0 2	7,5 × 0 6	-M $M+4,5$	$u_3 = 6$
	$v_1 \overset{Cho}{=} 0$	$v_2 = 1,5$	$v_3 = -1,5$	

Tất cả các ô đều có $k_{ij} \geq 0$ nên phương án cơ bản này tối ưu. Vì ô cấm $(3,3)$ nhận giá trị phân phối $x_{33} = 0$ nên bài toán có phương án tối ưu là:

X.Nghiệp S.Phẩm	I 9	II 6	III 5
A$_1$: 5	8,5 0	6 0	7 × 5
A$_2$: 7	9 7	10 0	6,5 0
A$_3$: 8	6 2	7,5 6	Ô cấm 0

Tổng lợi nhuận lớn nhất:

$f_{max} = [9\times7+6\times2+7{,}5\times6+7\times5]\times 20.000.000$ đồng $= 155\times 20.000.000$ đồng

Chú ý: ***Có thể giải bằng thuật toán quy 0 cước phí.***

Ví dụ 5 Giải bài toán vận tải được cho bởi bảng sau với điều kiện trạm B_1 phải thu đủ hàng:

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 75	6	3	1
A_2 : 45	4	2	3

Giải

Đây là bài toán tổng thu lớn hơn tổng phát với lượng hàng cần thu lớn hơn lượng hàng phát là 10 tấn. Ta lập thêm trạm phát giả A_3 với lượng hàng phát là 10 tấn và cước phí các ô (3,2) , (3,3) là 0 và ô (3,1) là M với M là số lớn tùy ý(vì B_1 phải thu đủ hàng nên trạm B_1 không thu lượng hàng giả của trạm A_3, do đó ô (3,1) phải là ô cấm).

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1: 75	6	3	1
A_2: 45	4	2	3
A_3 :10	M	0	0

<u>Bước 1</u> : Tìm PACB ban đầu bằng phương pháp cực tiểu cước phí.

- Phân vào ô (1,3) 50 tấn , hàng A_1 chỉ còn 25 tấn, xóa cột B_3.
- Phân vào ô (2,2) 20 tấn , hàng A_2 chỉ còn 25 tấn, xóa cột B_2.
- Phân vào ô (2,1) 25 tấn , ô (1,1) 25 tấn, ô (3,1) 10 tấn.

<u>Bước 2</u> : Qui 0 cước phí các ô chọn .

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50	
A_1: 75	6 × 25	3	1 × 50	$r_1 = -6$
A_2: 45	4 × 25	2 × 20	3	$r_2 = -4$
A_3 : 10	M × 10	0	0	$r_3 = -M$
	cho $s_1 = 0$	$s_2 = 2$	$s_3 = 5$	

Cho $s_1 = 0$ tính được $r_1 = -6$, $r_2 = -4$, $r_3 = -M$, $s_2 = 2$, $s_3 = 5$
Tính lại cước phí tất cả các ô ta được

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 75	0 × 25	-1	0 × 50
A_2 : 45	0 × 25	0 × 20	4
A_3 : 10	0 × 10	2-M ×	5-M

<u>Bước 3</u> : Còn ô (1,2), (3,2), (3,3) có cước phí âm nên PACB hiện có chưa tối ưu.

<u>Bước 4:</u> Đưa ô (3,2) vào ta được vòng $V = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$$V^C = \{(2,2),(3,1)\}\ ,\ \ V^L = \{(2,1),(3,2)\}$$

Ô đưa ra là ô (3,1), lượng điều chỉnh là 10. Các ô (2,1) và (3,2) mỗi ô cộng thêm 10 tấn ; các ô (2,2), (3,1) mỗi ô trừ đi 10 tấn.

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50	
A_1: 75	0 × 25	3	0 × 50	$r_1 = 0$
A_2: 45	0 × 35	2 × 10	4	$r_2 = 0$
A_3 : 10	0	2-M × 10	5 -M	$r_3 = M$
	$s_1 = 0$	$s_2 = -2$	$s_3 = 0$	

<u>Bước 2:</u> Qui 0 cước phí các ô chọn

Cho $r_1 = 0$ tính được $s_1 = 0$, $s_3 = 0$; $s_1 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$; $r_2 = 0 \Rightarrow s_2 = -2$; $s_2 = -2 \Rightarrow r_3 = M$.
Tính lại cước phí tất cả các ô ta được

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 75	0 / 25	1	0 / 50
A_2 : 45	0 / 35	0 / 10	4
A_3 : 10	0	0 / 10	5

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên P ACB đang có tối ưu.

Vậy phương án tối ưu bài toán ban đầu là

Thu / Phát	B_1 60	B_2 20	B_3 50
A_1 : 75	6 / 25	3	1 / 50
A_2 : 45	4 / 35	2 / 10	3

$$f_{min} = 6.25 + 1.50 + 2.10 + 4.35 = 360.$$

Ví dụ 6

Một công ty may mặc cần phân phối 2800 đơn vị sản phẩm may mặc loại A_1, 2200 đơn vị sản phẩm may mặc loại A_2 vào ba xí nghiệp B_1, B_2, B_3 để sản xuất, với năng lực sản xuất (số đơn vị sản phẩm loại A_1 hay sản phẩm loại A_2) lần lượt là 1600, 2000, 2400 đơn vị sản phẩm. ***Chi phí*** (*đơn vị tính 10.000 đồng/1đơn vị sản phẩm*) sản xuất của công ty khi phân phối mỗi đơn vị sản phẩm cho các xí nghiệp sản xuất được cho trong bảng sau

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2000	B_3 2400
A_1:2800	7	7,5	8
A_2:2200	8	8,5	7,5

Vì chiến lược phát triển công ty, nên xí nghiệp B_3 phải thu đủ 2400 đơn vị sản phẩm để sản xuất. Hỏi phải phân phối sản phẩm cho các xí nghiệp sản xuất như thế nào để ***tổng chi phí thấp nhất*** và tính tổng chi phí thấp nhất nhất đó?

Giải

Bài toán này có dạng bài toán vận tải không cân bằng thu phát với lượng phát ít hơn lượng thu là $(1600+2000+2400)-(2800+2200)=1000$. Lập thêm trạm giả A_3 với lượng cần phát $a_3=1000$. Để trạm B_3 thu đủ thì lượng hàng giả trạm A_3 không được phát vào trạm B_3 nên ô $(3,3)$ là ô cấm, vì cần ***tổng chi phí thấp nhất*** nên đây là bài toán $f \to \min$ do đó "cước phí" ô $(3,3)$ là M (với M là số dương lớn tùy ý).

Lần lượt phân phối như sau: ô $(1,1)$ 1600 ; ô $(1,2)$ 1200; ô $(2,3)$ 2200; ô $(3,2)$ 800; ô $(3,3)$ 200.

Sau khi phân phối xong ta được phương án cơ bản ban đầu không suy biến, rồi tiếp theo "quy 0 cước phí" các ô chọn ta được:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2000	B_3 2400	
A_1:2800	7 × 1600	7,5 × 1200	8	$r_1 \overset{cho}{=} 0$
A_2:2200	8	8,5	7,5 × 2200	$r_2=M$
A_3: 1000	0	0 × 800	M × 200	$r_3=7,5$
	$s_1=-7$	$s_2=-7,5$	$s_3=-M-7,5$	

Tính lại "cước phí" các ô

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2000	B_3 2400
A_1:2800	0 × 1600	0 × 1200	$0,5-M$ × Đưa vào
A_2:2200	$1+M$	$1+M$	0 × 2200
A_3: 1000	0,5	0 × 800	0 × Đưa ra 200

Còn ô (1,3) có "cước phí" âm nên phương án cơ bản hiện có không tối ưu.

Ô đưa vào là ô (1,3).

Vòng điều chỉnh là $V=\{(1,2),(1,3),(3,2),(3,3)\}$, $V^L=\{(1,3),(3,2)\}$, $V^C=\{(1,2),(3,3)\}$.

Ô đưa ra là ô $(3,3)$ và lượng điều chỉnh là $x_{33}=200$. Lập phương án mới rồi "quy 0 cước phí" các ô chọn ta được:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2000	B_3 2400	
A_1:2800	0 × 1600	0 × 1000	$0,5-M$ × 200	$r_1 \overset{cho}{=} 0$
A_2:2200	$1+M$	$1+M$	0 × 2200	$r_2=0,5-M$
A_3: 1000	0,5	0 × 1000	0 0	$r_3=0$
	$s_1=0$	$s_2=0$	$s_3=M-0,5$	

Tính lại "cước phí" các ô

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2000	B_3 2400
A_1:2800	0 × 1600	0 × 1000	0 × 200
A_2:2200	1,5	1,5	0 × 2200
A_3: 1000	0,5	0 × 1000	$M-0,5$ 0

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên phương án cơ bản nà tối ưu. Vì ô cấm $(3,3)$ nhận giá trị 0 nên bài toán có phương án tối ưu là:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2000	B_3 2400
A_1:2800	7 1600	7,5 1000	8 200
A_2:2200	8 0	8,5 0	7,5 2200

Tổng chi phí bé nhất: $f_{\min}=1\times1600+7,5\times1000+8\times200+7,5\times2200=27200$(*đơn vị tính 10.000 đồng*)

$=272000$ (*đơn vị tính 1.000 đồng*) $=272000000$ *đồng* $=272$ *(triệu đồng)*

Ví dụ 7

Một công ty may mặc cần phân phối 2200 đơn vị sản phẩm may mặc loại A_1, 2800 đơn vị sản phẩm may mặc loại A_2 vào ba xí nghiệp B_1, B_2, B_3 để sản xuất, với năng lực sản xuất (số đơn vị sản phẩm loại A_1 hay sản phẩm loại A_2) lần lượt là 1600, 2400, 2000 đơn vị sản phẩm. ***Chi phí*** (*đơn vị tính 10.000 đồng/1đơn vị sản phẩm*) sản xuất của công ty khi phân phối mỗi đơn vị sản phẩm cho các xí nghiệp sản xuất được cho trong bảng sau

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2400	B_3 2000
A_1:2200	8	8	8,5
A_2:2800	7,5	9	8

Vì chiến lược phát triển công ty, nên xí nghiệp B_2 phải thu đủ 2400 đơn vị sản phẩm để sản xuất. Hỏi phải phân phối sản phẩm cho các xí nghiệp sản xuất như thế nào để ***tổng chi phí thấp nhất*** và tính tổng chi phí thấp nhất đó?

<u>Giải</u>

Bài toán này có dạng bài toán vận tải không cân bằng thu phát với lượng phát ít hơn lượng thu là $(1600+2400+2000)-(2200+2800)=1000$. Lập thêm trạm giả A_3 với lượng cần phát $a_3=1000$. Để trạm B_2 thu đủ thì lượng hàng giả trạm A_3 không được phát vào trạm B_2 nên ô (3,2) là ô cấm, vì cần ***tổng chi phí thấp nhất*** nên đây là bài toán $f\to\min$ do đó "cước phí" ô (3,2) là M (với M là số dương lớn tùy ý).

Lần lượt phân phối như sau: ô (2,1) 1600 ; ô (1,2) 2200; ô (2,3) 1200; ô (3,2) 200; ô (3,3) 800

Sau khi phân phối xong ta được phương án cơ bản ban đầu không suy biến, rồi tiếp theo "quy 0 cước phí" các ô chọn ta được:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2400	B_3 2000	
A_1:2200	8	8 × 2200	8,5	$r_1=M$
A_2:2800	7,5 × 1600	9	8 × 1200	$r_2\overset{cho}{=}0$
A_3: 1000	0	M × 200	0 × 800	$r_3=8$
	$s_1=-7,5$	$s_2=-M-8$	$s_3=-8$	

Tính lại "cước phí" các ô

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2400	B_3 2000

A_1:2200	M+0,5	0 × 2200	M+0,5
A_2:2800	0 × 1600	-M+1 × Đưa vào	0 × 1200
A_3: 1000	0,5	0 × Đưara 200	0 × 800

Còn ô (2,2) có "cước phí" âm nên phương án cơ bản hiện có không tối ưu.

Ô đưa vào là ô (2,2).

Vòng điều chỉnh là $V=\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$, $V^L=\{(2,2),(3,3)\}, V^C=\{(2,3),(3,2)\}$.

Ô đưa ra là ô $(3,2)$ và lượng điều chỉnh là $x_{32}=200$. Lập phương án mới rồi "quy 0 cước phí" các ô chọn ta được:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2400	B_3 2000	
A_1:2200	M+0,5	0 × 2200	M+0,5	$r_1=-M+1$
A_2:2800	0 × 1600	-M+1 × 200	0 × 1000	$r_2 \overset{cho}{=} 0$
A_3: 1000	0,5	0 0	0 × 1000	$r_3=0$
	$s_1=0$	$s_2=M-1$	$s_3=0$	

Tính lại "cước phí" các ô

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2400	B_3 2000	
A_1:2200	1,5	0 × 2200	1,5	$r_1=-M+1$
A_2:2800	0 × 600	0 × 200	0 × 1000	$r_2 \overset{cho}{=} 0$
A_3: 1000	0,5	M-1 0	0 × 1000	$r_3=0$
	$s_1=0$	$s_2=M-1$	$s_3=0$	

Tất cả các ô đều có cước phí không âm nên phương án cơ bản nà tối ưu. Vì ô cấm $(3,2)$ nhận giá trị 0 nên bài toán có phương án tối ưu là:

Xí nghiệp / Sản phẩm	B_1 1600	B_2 2400	B_3 2000
A_1:2200	8 0	8 2200	8,5 0
A_2:2800	7,5 1600	9 200	8 1000

Tổng chi phí bé nhất: $f_{\min} = 8\times 2200 + 7{,}5\times 1600 + 9\times 200 + 8\times 1000 = 39400$(*đơn vị tính 10.000 đồng*)

$= 39400$ (*đơn vị tính 1.000 đồng*) $= 394000000$ *đồng* $= 394$ (*triệu đồng*)

Chú ý ***Có thể giải bằng thuật toán thế vị*** (gọn hơn thuật toán quy 0 cước phí 2 bảng vận tải).

Ví dụ 8

Một công ty cần bán 120 đơn vị sản phẩm loại A_1, 45 đơn vị sản phẩm loại A_2, 85 đơn vị sản phẩm loại A_3 thông qua bốn đại lý B_1, B_2, B_3, B_4 với khả năng bán (số đơn vị sản phẩm loại A_1 hay sản phẩm loại A_2 hay sản phẩm loại A_3) lần lượt là 60, 90, 70, 50 đơn vị sản phẩm. Lợi nhuận (*đơn vị tính 500.000 đồng/1sản phẩm*) khi bán mỗi sản phẩm thông qua mỗi đại lý được cho trong bảng sau

Đại lý / Sản phẩm	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50
A_1:120	3	4	4	5
A_2:45	4	6	5	4,5
A_3:85	6	6	7	8

Vì chiến lược phát triển kinh doanh của công ty, nên đại lý B_1 phải thu đủ 60 đơn vị sản phẩm để bán. Hỏi phải phân phối sản phẩm cho các đại lý bán như thế nào để ***tổng lợi nhuận lớn nhất*** và tính tổng ***lợi nhuận lớn nhất*** đó?

Giải

Bài toán này có dạng bài toán vận tải không cân bằng thu phát với lượng phát ít hơn lượng thu là $(60+90+70+50)-(120+45+85)=20$. Lập thêm trạm giả A_4 với lượng cần phát $a_4 = 20$. Để trạm B_1 thu đủ thì lượng hàng giả trạm A_4 không được phát vào trạm B_1 nên ô (4,1) là ô cấm, vì cần ***tổng lợi nhuận lớn nhất*** nên đây là bài toán $f \to \max$ do đó $C_{41} = -M$ (với M là số dương lớn tùy ý).

Lần lượt phân phối như sau: ô (3,4) 50 ; ô (3,3) 35; ô (2,2) 45; ô (1,2) 45; ô (1,3) 35 ; ô (1,1) 40 ; ô (4,1) 20.

Đại lý / Sản phẩm	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50
A_1:120	3 × 40	4 × 45	4 × 35	5
A_2:45	4	6 × 45	5	4,5
A_3:85	6	6	7 × 35	8 × 50
A_4:20 Trạm giả	$-M$ × 20	0	0	0

Sau khi phân phối xong ta được phương án cơ bản ban đầu không suy biến, tìm các thế vị hàng và các thế vị cột rồi tiếp theo tính $k_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ ta được được:

Đại lý / Sản phẩm	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50	
A_1:120	3 × 0, 40	4 × 0, 45	4 × 0, 35	5, 0	$u_1 \overset{cho}{=} 0$
A_2:45	4, 1	6 × 0, 45	5, 1	4,5, 2,5	$u_2 = 2$
A_3:85	6, 0	6, 1	7 × 0, 35	8 × 0, 50	$u_3 = 3$
A_4:20 Trạm giả	$-M$ × 0, Đưa ra 20	0, $1-M$, Đưa vào	0, $1-M$	0, $2-M$	$u_4 = -M-3$
	$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 4$	$v_4 = 5$	

Ô (4,2) có $k_{42} = 1 - M < 0$ nên phương án cơ bản hiện có không tối ưu. Ô đưa vào là ô (4,2).

Đại lý Sản phẩm	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50	
A_1:120	3 × 0 60	4 × 0 25	4 × 0 35	5 0	$u_1 \overset{cho}{=} 0$
A_2:45	4 1	6 × 0 45	5 1	4,5 2,5	$u_2 = 2$
A_3:85	6 0	6 1	7 × 0 35	8 × 0 50	$u_3 = 3$
A_4:20	$-M$ $M-1$	0 × 0 20	0 0	0 1	$u_4 = -4$
	$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 4$	$v_4 = 5$	

Tất cả các ô đều có $k_{ij} \geq 0$ nên phương án cơ bản này tối ưu. Vì ô cấm $(4,1)$ nhận giá trị phân phối $x_{41} = 0$ nên bài toán ban đầu có phương án tối ưu là:

Đại lý Sản phẩm	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50
A_1:120	3 × 60	4 × 25	4 × 35	5
A_2:45	4	6 × 45	5	4,5
A_3:85	6	6	7 × 35	8 × 50

Tổng lợi nhuận lớn nhất:

$f_{\max} = [3 \times 60 + 4 \times 25 + 4 \times 35 + 6 \times 45 + 7 \times 35 + 8 \times 50] \times 500.000$ đồng

$= 1335 \times 500.000$ đồng $=$ 667500000 đồng

Chú ý: ***Có thể giải bằng thuật toán quy 0 cước phí.***

....

Bài tập

Bài 3.1 Tìm phương án cơ bản ban đầu $(f \to \min)$

Thu Phát	B_1 60	B_2 90	B_3 55	B_4 45
A_1: 100	3	4	3,5	5
A_2: 70	4	6	5	4,5
A_3: 80	5	5,5	6	4,5

a) Trường hợp $f \to \min$ b) Trường hợp $f \to \max$

Bài 3.2 Giải bài toán vận tải ($f \to \min$)

Thu / Phát	B_1 70	B_2 80	B_3 65	B_4 85
A_1: 100	5	4	6	7
A_2: 50	8	5	5	6,5
A_3: 60	5,5	6,5	7	7,5
A_4: 90	6	7	4	5

Bài 3.3 Cho bài toán vận tải ($f \to \min$)

Thu / Phát	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50
A_1: 80	3	4	4	5
A_2: 45	4	6	5	4,5
A_3: 85	5	5	6	7

a) Giải bài toán trên.

b) Giải bài toán trên với điều kiện trạm B_3 thu đủ hàng.

Bài 3.4 Cho bài toán vận tải ($f \to \max$)

Thu / Phát	B_1 60	B_2 90	B_3 70	B_4 50
A_1: 80	3	4	4	5
A_2: 45	4	6	5	4,5
A_3: 85	5	5	6	7

a) Giải bài toán trên.

b) Giải bài toán trên với điều kiện trạm B_1 thu đủ hàng.

Bài 3.5 Một nông trường có 3 khu đất A_1, A_2, A_3 có diện tích tương ứng 250, 1400, 350 ha. Nông trường định trồng 4 loại cây B_1, B_2, B_3, B_4 với diện tích dự định là 500, 400, 600, 500 ha. Lợi nhuận khi trồng loại cây B_j trên một ha đất A_i là c_{ij} (triệu đồng) được cho trong bảng sau:

Loại cây / Khu đất	B_1 500	B_2 400	B_3 600	B_4 500
A_1:250	22	25	20	18
A_2:1400	30	32	25	28
A_3:350	29	28	25	23

Hãy lập kế hoạch trồng cây của nông trường sao cho tổng lợi nhuận cao nhất.

Đáp số

- Khu đất A_1 trồng 250 ha loại cây B_3.
- Khu đất A_2 trồng 500 ha loại cây B_1, 400ha loại cây B_2, 500 ha loại cây B_4.
- Khu đất A_3 trồng 350 ha loại cây B_3.
- Tổng lợi nhuận lớn nhất là: 55 550 000 000 đồng.

Bài 3.6 Một xí nghiệp có 200 công nhân gồm : 50 loại A_1 , 70 loại A_2, 80 loại A_3 . Xí nghiệp lại có 200 máy gồm : 40 loại B_1, 60 loại B_2, 100 loại B_3 .Khi sản xuất mỗi công nhân sử dụng một máy để tạo ra cùng một loại sản phẩm. Công nhân loại A_3 không sử dụng được máy loại B_1. Năng suất của mỗi loại công nhân khi sử dụng mỗi loại máy được cho trong bảng sau (sản phẩm/ giờ). Hỏi phải phân công lao độngnhư thế nào để trong 1 giờ tạo ra được nhiều sản phẩm nhất?

Máy / C. nhân	B_1 40	B_2 60	B_3 100
A_1: 50	4	4	7
A_2: 70	5	10	9
A_3: 80	--	6	5

Bài 3.7 Một xí nghiệp có 30 công nhân loại I, 20 công nhân loại II và 10 công nhân loại III. Xí nghiệp có 10 máy A, 25 máy B, 25 máy C. Năng suất của mỗi công nhân đối với mỗi loại máy (sản phẩm/ giờ) được cho trong bảng sau đây.

Máy / CN	A 10	B 25	C 25
Loai I : 30	50	45	30
Loại II : 20	40	42	28
Loại III : 10	-	38	25

Hãy phân công công nhân đứng máy thế nào để tổng số sản phẩm làm được trong giờ là lớn nhất biết công nhân loại III không đứng được máy A.

a) Lập mô hình bài toán. b) Giải bài toán.

Đáp số b) $X_{opt} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $f_{max} = 2280$

Bài 3.8 Một nông trường cần trồng 30 ha lúa X_1; 20 ha lúa X_2 và 40 ha lúa X_3 trên ba khu đất I, II, III có diện tích lần lượt là 25 ha , 25 ha, 40 ha. Năng suất mỗi loại lúa trên mỗi khu đất (tấn/ha) cho trong bảng sau:

Đất / Giống lúa	I 25	II 25	III 40
X_1: 30	-	8	6
X_2: 20	6	9	7
X_3: 40	5	4	6

Hãy lập kế hoạch phân phối đất trồng sao cho tổng sản lượng cao nhất biết giống lúa X_1 không thể trồng trên đất loại I.

a) Lập mô hình bài toán. b) Giải bài toán.

Đáp số b) $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \\ 25 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ hay $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 \\ 0 & 20 & 0 \\ 25 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ $f_{max} = 585$

Bài 3.9 Người ta cần trồng 4 loại hoa : Cúc, Hồng, Lan, Layơn trên 3 mảnh vườn khác nhau I, II, III. Biết rằng diện tích đất hiện có ứng với mỗi mảnh vườn là 40, 60, 80 (a). Diện tích trồng mỗi loại theo kế hoạch là Cúc- 50 (a); Hồng- 70 (a); Lan- 30 (a); Layơn-30(a). Ngoài ra, do tính chất của các loại đất khác nhau, nên hoa hồng không thể trồng trên mảnh đất thứ I, và hoa Layơn không trông được trên mảnh đất thứ III. Biết thu hoạch ước tính của từng loại hoa trên từng loại đất cho như sau : (đơn vị : trăm ngàn đồng/a). Hãy lập kế hoạch trồng hoa sao cho thu được lợi nhuận nhiều nhất.

$$C = \begin{bmatrix} 10 & - & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 12 & 12 \\ 15 & 10 & 10 & - \end{bmatrix}$$

Giải bài toán tìm kế hoạch tối ưu.

Đáp số $X_{opt} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & 30 & 0 \\ 40 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hay $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 40 & 20 & 0 \\ 50 & 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f_{max} = 200.000.000 đồng

Bài 3.10 Giải bài toán vận tải cho bởi bảng sau: ($f \to \min$)

Thu / Phát	B_1 60	B_2 70	B_3 40	B_4 30
A_1 : 100	2	1	4	3
A_2 : 80	5	3	2	6
A_3 : 20	6	2	1	5

Bài 3.11 Bài toán vận tải được cho bởi bảng ($f \to \min$)

Thu / Phát	10	30	50
25	7	6	5
10	2	1	4
45	3	5	2

a) Lập mô hình bài toán.
b) Mô hình sẽ như thế nào nếu trạm thu thứ hai phải nhận đủ hàng?
c) Giải bài toán trong hai trường hợp.

Bài 3.12 Đại hội thế vận được tổ chức đồng loạt cùng ngày ở 4 địa điểm. Các nhu cầu vật chất (tấn) được phát đi từ 3 địa điểm. Các dữ liệu về yêu cầu thu phát và cự ly (km) được cho trong bảng dưới. Do đặc điểm của các phương tiện vật chất, thời gian và phương tiện vận tải, nên không thể chuyển quá xa trên 150 km. Tìm phương án chuyên chở sao cho tổng số T.km là nhỏ nhất.

Thu / Phát	15	10	17	18
20	160	50	100	70
30	100	200	30	60
10	50	40	30	50

Bài 3.13 Một xí nghiệp cơ khí có 3 công nhân A, B, C phải đứng 3 máy tiện I, II, III để sản xuất một loại chi tiết máy. Năng suất của mỗi công nhân đối với mỗi loại máy (chi tiết/ ngày) được cho trong bảng sau đây.

Máy / N.suất / C.nhân	I 1	II 1	III 1
A : 1	19	21	25
B : 1	20	18	24
C : 1	17	26	18

Lập phương án phân công các công nhân đứng máy sao cho tổng số chi tiết sản xuất được trong ngày là lớn nhất.

a) Lập mô hình bài toán.
b) Mô hình sẽ thay đổi thế nào nếu công nhân B không đứng được máy I.
c) Giải bài toán trong hai trường hợp.

Bài 3.14

Để chuẩn bị hàng bán vào dịp tết nguyên đán, đội vận tải phải chuyển hàng từ 4 xí nghiệp: A, B, C, D đến 5 cửa hàng: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Số tấn hàng cần ở các cửa hàng, cự ly giữa các xí nghiệp và các cửa hàng (km) được cho trong bảng:

CH / XN	C_1 10	C_2 10	C_3 10	C_4 20	C_5 20
A : 5	5	1	4	6	7
B : 15	3	4	2	7	8
C : 20	4	3	1	7	9
D : 30	6	5	4	9	11

Muốn có kế hoạch vận chuyển sao cho tổng số T.km là nhỏ nhất.

a) Giải bài toán

b) Giải bài toán trong trường hợp cây cầu A vừa bị đổ mà tuyến đường từ A đến C_2 và từ C đến C_3 đều phải qua cầu này.

Bài 3.15 Một công ty cơ khí ký hợp đồng giao cho khách hàng 7 sản phẩm loại A_1, 8 sản phẩm loại A_2, 5 sản phẩm loại A_3 trong thời gian 1 tháng. Công ty có 3 xí nghiệp I, II, III và xí nghiệp II không sản xuất được sản phẩm A_2. Năng lực sản xuất mỗi xí nghiệp I, II, III trong thời gian 1 tháng lần lượt là 9 sản phẩm, 5 sản phẩm, 6 sản phẩm. Lợi nhuận thu được trên mỗi sản phẩm do các xí nghiệp sản xuất ra được cho trong bảng sau (đơn vị tính: 15.000.000 đồng/sản phẩm).

X.Nghiệp / S.Phẩm	I 9	II 5	III 6
A_1: 7	9	5	10
A_2: 8	5	--	6
A_3: 5	7	4	4

Hỏi phải phân công các xí nghiệp sản xuất như thế nào để thực hiện được hợp đồng với lợi nhuận lớn nhất và cho biết số tiền lợi nhuận thu được đó?

Bài 3.16

Giải bài toán vận tải (f$\rightarrow$ min) sau đây với điều kiện trạm B_1 phải thu đủ hàng.

Phát \ Thu	B_1 70	B_2 80	B_3 65	B_4 85
A_1: 90	6	7	4	5
A_2:100	5	4	6	7
A_3: 50	8	5	6	6,5

<u>Bài 3.17</u> Giải bài toán vận tải (**f→ max**) sau đây với điều kiện trạm B_2 phải thu đủ hàng.

Phát \ Thu	B_1 80	B_2 120	B_3 100
A_1:140	7	5,5	8
A_2:110	5	6	5,5

<u>Bài 3.18</u> Một công ty có 3 nhà máy đặt tại 3 địa điểm khác nhau để sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Công suất (sản phẩm/tháng) và chi phí sản suất (ngàn đồng/sản phẩm) tại mỗi nhà máy được cho trong bảng sau:

Nhà máy	Công suất	Chi phí sản xuất
A_1	100 000	24
A_2	150 000	22
A_3	200 000	23

Các sản phẩm của công ty được phân phối đến 4 tổng đại lý với mức tiêu thụ và giá bán (ngàn đồng/sản phẩm) như sau:

Tổng đại lý	Khả năng tiêu thụ	Giá bán
B_1	70 000	32
B_2	95 000	31
B_3	145 000	30
B_4	100 000	33

Giá cước vận chuyển một sản phẩm từ các nhà máy đến các tổng đại lý được cho trong bảng sau:

Nhà máy \ Tổng đại lý	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	4	1	5
A_2	6	4	4	6
A_3	3	3	2	3

a) Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định kế hoạch sản xuất và phân phối sản phẩm từ các nhà máy đến các tổng đại lý trong một tháng sao cho tổng lợi nhuận của công ty lớn nhất.

b) Xác định kế hoạch sản xuất và phương án phân phối sản phẩm tối ưu của công ty.

Đáp số b)

- Nhà máy A_1 sản xuất 100 000 sản phẩm và phân phối hết đến tổng đại lý B_3.
- Nhà máy A_2 sản xuất 110 000 sản phẩm và phân phối đến tổng đại lý B_2 95 000 sản phẩm, B_3 15 000 sản phẩm.
- Nhà máy A_3 sản xuất 200 000 sản phẩm và phân phối đến tổng đại lý B_1 70 000 sản phẩm, B_3 30 000 sản phẩm, B_4 100 000 sản phẩm.
- Tổng lợi nhuận tối đa: 2 305 000 000 đồng

Câu hỏi trắc nghiệm

(chọn 1 trong 4 câu:A, B, C, D)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
B) Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
C) Hàm mục tiêu của bài toán vận tải luôn bị chặn.
D) Phương án tối ưu của bài toán vận tải luôn duy nhất.

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bài toán vận tải không cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
B) Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải không cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
C) Hàm mục tiêu của bài toán vận tải không cân bằng thu phát luôn bị chặn.
D) Phương án tối ưu của bài toán vận tải không cân bằng thu phát luôn duy nhất.

Câu 3 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
B) Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
C) Hàm mục tiêu của bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại luôn bị chặn.
D) Phương án tối ưu của bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại luôn duy nhất.

Câu 4 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
B) Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải hàm mục tiêu cực đại cân bằng thu phát luôn có PATƯ.
C) Bài toán vận tải có ô cấm luôn có phương án tối ưu duy nhất.
D) Bài toán đối ngẫu của bài toán sản xuất đồng bộ luôn có PATƯ.

Chương 4

BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

§ 1 NỘI DUNG VÀ TÍNH CHẤT BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

1.1. Nội dung và mô hình toán học của bài toán.

Giả sử một loại sản phẩm được lắp ráp bởi n chi tiết khác nhau $C_1, C_2, ..., C_n$ và mỗi sản phẩm cần đúng 1 chi tiết mỗi loại. Tham gia vào quá trình sản xuất ra các chi tiết này có m loại máy $M_1, M_2, ..., M_m$ và mỗi loại có đúng 1 cái. Gọi c_{ij} là năng suất của máy M_i khi dùng để sản xuất chi tiết C_j (tính theo đơn vị thời gian có thể là giờ, ngày, ca, tuần, tháng,...). Để cho tiện trình bày, ta qui ước năng suất tính theo ca. Ma trận $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{m\times n}$ gọi là ma trận năng xuất $(c_{ij} \geq 0)$. Hãy bố trí thời gian làm việc cho các máy sao cho tổng thành phẩm thu được trong một ca là lớn nhất.

❖ ***Phân tích bài toán:*** Gọi x_{ij} là khoảng thời gian (tính theo đơn vị là ca) máy M_i sản xuất chi tiết C_j $(i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n}\ )$ và z là tổng số sản phẩm lắp ráp được.

- Tổng số sản phẩm tạo ra nhiều nhất: $f(z,x) = z \to \max$
- Các máy sử dụng hết cả ca làm việc: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ ,\ i = \overline{1,m}$
- Số sản phẩm lắp ráp được không vượt quá số chi tiết mỗi loại sản xuất được trong ca: $z - \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \leq 0\ ,\ j = \overline{1,n}$

Ta có mô hình toán học là tìm $(z,x) = (z,x_{ij})$ sao cho: (ta gọi bài toán này là (P))

$$(1)\quad f(z,x) = z \to \max$$

$$(2)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\quad i = \overline{1,m} \\ z - \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \leq 0,\ \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$(3)\quad z \geq 0\ ;\ x_{ij} \geq 0\ (i = \overline{1,m}\ ,\ j = \overline{1,n}\ )$$

Mỗi bộ $(z,x_{ij}\ )$ thỏa (2) và (3) gọi là một phương án. Phương án thỏa (1) gọi là PATƯ.

1.2. Đặt bài toán dưới dạng bảng.

Bài toán sản xuất đồng bộ là bài toán QHTT. Nhưng do nó có dạng đặc biệt nên người ta không giải bằng phương pháp đơn hình mà giải bằng phương pháp khác. Để thuận tiện cho việc trình bày thuật toán này, ta biểu diễn bài toán dạng bảng với ma trận năng suất là $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$. Tất cả các khái niệm về ô, vòng,... tương tự bài toán vận tải.

Chi tiết / Máy	C_1 1	C_2 1	...	C_j 1	...	C_n 1
$M_1 : 1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
$M_2 : 1$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$M_i : 1$	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$M_m : 1$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

1.3. Tính chất bài toán sản xuất đồng bộ.

❖ ***Tính chất 1*:** Bài toán sản xuất đồng bộ luôn có PATƯ.

Chứng minh

- Bài toán SXĐB có phương án là: $z = 0$, $x_{ij} = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}$
- Bài toán SXĐB có hàm mục tiêu bị chặn trên: $f(z,x) \leq m.\max c_{ij}$

Vậy bài toán SXĐB có PATƯ. ■

Xét bài toán sản xuất đồng bộ (P):

$$(1)\ \ f(z,x) = z \to \max$$

$$(2)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & i = \overline{1,m} \\ z - \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \leq 0, & j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$(3)\ \ z \geq 0\ ;\ x_{ij} \geq 0\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán này là (D):

(1) $g(u, v) = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min$

(2) $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} v_j \geq 1, & \left(i = \overline{1,m}\right) \\ u_i - c_{ij}v_j \geq 0 & \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$

(3) $v_j \geq 0$ ($j = \overline{1,n}$), u_i tùy ý ($i = \overline{1,m}$).

Các cặp ràng buộc đối ngẫu là:

$$z \geq 0 \leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j \geq 1$$

$$u_i - c_{ij}v_j \geq 0 \leftrightarrow x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n})$$

$$z - \sum c_{ij}x_{ij} \leq 0 \leftrightarrow v_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$$

Dựa vào định lý độ lệch bù yếu ta có tính chất sau.

- ***Tính chất 2:*** Điều kiện cần và đủ để phương án (z,x_{ij}) của bài toán (P) và phương án (u_i,v_j) của bài toán (D) tối ưu là:

$$(*)\ \begin{cases} z\left(\sum_{j=1}^{n} v_j - 1\right) = 0 & (1) \\ x_{ij}\left(u_i - c_{ij}v_j\right) = 0 & (2) \\ v_j\left(z - \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

Tính chất này suy ra dễ dàng từ định lý độ lệch bù yếu.

§2. PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU CHỈNH NHÂN TỬ

2.1 Cơ sở toán học của phương pháp.

Cơ sở toán học để giải bài toán SXĐB là dựa vào bài toán đối ngẫu của nó và định lý độ lệch bù yếu. Tức là, ta đi tìm một phương án (z,x_{ij}) của bài toán SXĐB và một phương án (u_i,v_j) của bài toán đối ngẫu của nó thỏa hệ (*) trong tính chất 2. Ý tưởng phương pháp này giống như thuật toán thế vị trong bài toán vận tải nhưng khác nhau ở trình tự thực hiện như sau:

Phương pháp thế vị	*Phương pháp điều chỉnh nhân tử*
♦ Tìm một phương án cơ bản của bài toán vận tải.	♦ Tìm hệ thống nhân tử (u_i,v_j) thỏa điều kiện là phương án bài toán đối ngẫu.
♦ Dựa vào phương án cơ bản bài toán vận tải để tìm hệ thống thế vị (u_i,v_j).	♦ Dựa vào hệ thống nhân tử tìm một "Giả phương án " của bài toán SXĐB.
♦ Nếu hệ thống thế vị này thỏa điều kiện là phương án bài toán đối ngẫu tương ứng thì dừng. (stop)	♦ Nếu "Giả phương án " này thỏa điều kiện là phương án của bài toán SXĐB thì dừng.(stop)
♦ Nếu hệ thống thế vị chưa thỏa điều kiện là phương án của bài toán đối ngẫu thì quay trở lại điều chỉnh phương án cơ bản bài toán vận tải.	♦ Nếu "Giả phương án " này chưa thỏa điều kiện là phương án của bài toán SXĐB thì quay trở lại điều chỉnh nhân tử.

2.2. Thuật toán điều chỉnh nhân tử:

Bước 1 *Xây dựng hệ thống nhân tử các ô chọn.*

1a) *Tìm các nhân tử và ô chọn đầu tiên*: Nếu $c_{pq} = \max\{c_{ij} / i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n}\}$ thì (p,q) là ô chọn đầu tiên, $u_p = c_{pq}$, $v_q = 1$. Tiếp theo thực hiện luân phiên hai bước 1b) và 1c).

1b) *Tìm nhân tử cột và ô chọn tiếp theo*: Nếu hàng k đã có nhân tử tìm trên hàng này c_{kt} thỏa $c_{kt} = \max\{c_{kj}$: cột j chưa có nhân tử$\}$. Khi đó nhân tử cột t xác định như sau: $v_t = \min\left\{\frac{u_i}{c_{it}} : \text{hàng i đã có nhân tử và } c_{it} > 0\right\} = \frac{u_x}{c_{xt}}$

Ô (x,t) là ô chọn tiếp theo.

1c) *Tìm nhân tử hàng và ô chọn tiếp theo*: Nếu cột s đã có nhân tử tìm trên cột này c_{rs} thỏa $c_{rs} = \max\{c_{is}$: hàng i chưa có nhân tử$\}$. Khi đó nhân tử hàng r xác định như sau: $u_r = \max\{c_{rj}v_j : \text{cột } j \text{ đã có nhân tử}\} = c_{ry}v_y$

Ô (r,y) là ô chọn tiếp theo.

Hai bước 1b), 1c) được thực hiện cho đến khi mọi hàng và mọi cột đều có nhân tử. Sang bước 2.

Bước 2 *Tìm một giả phương án (z, x_{ij}) của bài toán SXĐB.*

Gọi S là tập các ô chọn. Đặt $z = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} u_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j}$, tìm x_{ij} ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) thỏa

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = z,\ j = \overline{1,n} \end{array}\right\} \text{với } (i,j) \in S \\ \quad x_{ij} = 0, \text{ với } (i,j) \notin S \end{cases}$$

Bước 3 *Kiểm tra tính tối ưu.*

- Nếu $x_{ij} \geq 0$, $\forall (i,j) \in S$ thì giả phương án (z, x_{ij}) là PATƯ của bài toán SXĐB.
- Nếu tồn tại ô $(i,j) \in S$ mà $x_{ij} < 0$ thì sang bước 4.

Bước 4 *Điều chỉnh nhân tử để tìm giả phương án mới .*

4a) *Tìm ô đưa ra*: Ô đưa ra là ô có $x_{ij} < 0$ nhỏ nhất. Giả sử đó là ô (i^o, j^o).

4b) *Tìm hàng và cột điều chỉnh*:

- Đánh dấu "+" vào hàng i^o và đánh dấu "-" vào cột j^o.
- Trên hàng i đã đánh dấu "+", ta đánh dấu "+" cho cột có ô chọn trên hàng này và chưa được đánh dấu.
- Trên cột j đã đánh dấu "+", ta đánh dấu "+" cho hàng có ô chọn trên cột này và chưa được đánh dấu.

Tiếp tục lặp lại việc đánh dấu này cho đến khi không còn đánh dấu được thêm dấu "+" nào nữa. Tất cả các hàng và cột chưa đánh dấu sẽ được đánh dấu "_".

4c) *Tìm hệ số điều chỉnh λ và ô đưa vào*:

$\lambda = \min\left\{\dfrac{u_i}{c_{ij}v_j} : (i,j) \text{ là ô được đánh dấu } (-,+), c_{ij} > 0\right\} = \dfrac{u_{i^*}}{c_{i^*j^*}v_{j^*}}$, ô (i*,j*) là ô đưa vào.

4d) *Sửa nhân tử* :

$$u_i' = \begin{cases} u_i, \text{nếu hàng i đánh dấu "-"} \\ \lambda u_i, \text{nếu hàng i đánh dấu "+"} \end{cases}$$

$$v_j' = \begin{cases} v_j, \text{nếu cột j đánh dấu "-"} \\ \lambda v_j, \text{nếu cột j đánh dấu "+"} \end{cases}$$

Trở lại bước 2.

Ví dụ 1 Giải bài toán SXĐB sau đây:

C.tiết / Máy	C_1 1	C_2 1	C_3 1
M_1 : 1	25	71	50
M_2: 1	40	80	53
M_3 : 1	24	90	60

Bước 1 Xây dựng hệ thống nhân tử các ô chọn.

1a) Ô có cước phí lớn nhất là ô (3,2) với $c_{32} = 90$, $u_3 = 90$, $v_2 = 1$. Ô chọn đầu tiên là ô (3,2).

1b) Trên hàng 3: max $\{c_{3j} : j = 1, 3\} = 60 = c_{32}$. Nhân tử cột 3 là $v_3 = \min\left\{\frac{u_i}{c_{i3}} : i = 3\right\} = \frac{90}{60} = 1{,}5$. Ô chọn thứ hai là ô (3,3).

1c) Trên cột 2 : max $\{c_{i2} : i = 1, 2\} = 80 = c_{22}$. Nhân tử hàng 2 là $u_2 = \max\{c_{2j}v_j : j = 2, 3\} = 80 = c_{22}v_2$. Ô chọn thứ ba là ô (2,2).

1b) Trên hàng 2: max $\{c_{2j} : j = 1\} = 40 = c_{21}$. Nhân tử cột 1 là $v_1 = \min\left\{\frac{u_i}{c_{i1}} : i = 2, 3\right\} = \frac{80}{40} = 2$. Ô chọn thứ tư là ô (2,1).

1c) Trên cột 3 : max $\{c_{i3} : i = 1\} = 50 = c_{13}$. Nhân tử hàng 1 là $u_1 = \max\{c_{1j}v_j : j = 1, 2, 3\} = 75 = c_{13}v_3$. Ô chọn thứ năm là ô (1,3).

C.tiết / Máy	C_1 1	C_2 1	C_3 1	
M_1 : 1	25	71	50	$u_1 = 75$
M_2: 1	40	80	53	$u_2 = 80$
M_3 : 1	24	90	60	$u_3 = 90$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1{,}5$	

Bước 2 Xác định giả phương án

$z = \dfrac{75+80+90}{2+1+1{,}5} = \dfrac{490}{9}$, S ={(1,3); (2,1); (2,2); (3,2); (3,3)}, $x_{ij} = 0\ \forall$ (i,j) $\notin$ S.

Lập hệ phương trình

$$\begin{cases} x_{13} & = & 1 \\ x_{21} & +x_{22} & =1 \\ x_{32} & +x_{33} & =1 \\ 40x_{21} & = & 490/9 \\ 80x_{22} & +90x_{32} & =490/9 \\ 50x_{13} & +60x_{33} & =490/9 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được : $x_{13} = 1$, $x_{33} = 2/27$, $x_{32} = 25/27$, $x_{22} = -13/36$, $x_{21}= 49/36$.

C.tiết / Máy	C_1 1	C_2 1	C_3 1	
M_1 : 1	25	71	50 1	u_1 =75
M_2: 1	40 49/36	80 -13/36	53	u_2 = 80
M_3 : 1	24	90 25/27	60 2/27	u_3 = 90
	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1{,}5$	

<u>Bước 3</u> Còn ô (2,2) có x_{22} = -13/36 < 0 nên giả phương án này chưa là phương án.

<u>Bước 4</u> Điều chỉnh nhân tử.

- Ô đưa ra là ô (2,2).
- Đánh dấu "+" vào hàng 2, đánh dấu "-" vào cột 2. Dựa vào hàng 2 và ô chọn (2,1) ta đánh dấu "+" vào cột 1. Các hàng và cột còn lại đánh dấu "-".

C.tiết / Máy	C_1 1	C_2 1	C_3 1	
M_1 : 1	25	71	50 1	u_1 =75"-"
M_2: 1	40 49/36	80 -13/36	53	u_2 = 80"+" λ = 1,5
M_3 : 1	24	90 25/27	60 2/27	u_3 = 90"-"
	$v_1 = 2$ "+" λ = 1,5	$v_2 = 1$ "-"	$v_3 = 1{,}5$ "-"	

- $\lambda = \min\left\{\frac{75}{25.2}, \frac{90}{24.2}\right\} = 1{,}5 = \frac{u_1}{c_{11}v_1}$. Ô đưa vào là ô (1,1).
- Nhân u_2 cho 1,5; nhân v_1 cho 1,5 ta được hệ thống nhân tử và ô chọn mới là

C.tiết \ Máy	C_1 1	C_2 1	C_3 1	
M_1 : 1	25 x	71	50 x	$u_1 = 75$
M_2: 1	40 x	80	53	$u_2 = 120$
M_3 : 1	24	90 x	60 x	$u_3 = 90$
	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1{,}5$	

$$S = \{(1,3); (2,1); (1,1); (3,2); (3,3)\}$$

<u>*Bước 2*</u> Xác định giả phương án

$z = \frac{75+120+90}{3+1+1{,}5} = \frac{570}{11}$, $x_{ij} = 0\ \forall\ (i,j) \notin S$. Lập hệ phương trình

$$\begin{cases} x_{11} + x_{13} = 1 \\ x_{21} = 1 \\ x_{32} + x_{33} = 1 \\ 90x_{32} = 570/11 \\ 25x_{11} + 40x_{21} = 570/11 \\ 50x_{13} + 60x_{33} = 570/11 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được : $x_{21} = 1$, $x_{11} = 26/55$, $x_{13} = 29/55$, $x_{33} = 14/33$, $x_{32} = 19/33$.

Đến đây $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$) nên giả phương án này là PATƯ bài toán SXĐB.

Vậy PATƯ của bài toán SXĐB là :

C.tiết \ Máy	C_1 1	C_2 1	C_3 1
M_1 : 1	25 26/55	71	50 29/55
M_2: 1	40 1	80	53
M_3 : 1	24	90 14/33	60 19/33

Tổng sản phẩm sản xuất được trong ca là $z = \frac{570}{11}$.

<u>***Ví dụ 2***</u>

Một công ty may mặc ký hợp đồng giao cho khách hàng 50.000 ***bộ quần áo*** (mỗi bộ gồm 1 quần, 1 áo). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất quần, áo được cho trong bảng sau (quần/ngày, áo/ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	Quần 1	Áo 1
XN I: 1	440	420
XN II: 1	500	480

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ quần áo*** nhất ? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số quần áo hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất quần áo trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất quần (hoặc áo) xong rồi mới chuyển sang sản xuất áo (hoặc quần). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất quần áo cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

<u>Giải</u>

Đây là bài toán dạng "Bài toán sản xuất đồng bộ", mỗi bộ gồm 1 quần và 1 áo.

1a) $\max\{c_{ij} : i = 1,2; j = 1,2\} = 500 = c_{12}$ nên ô chọn đầu tiên là ô (1,2), $u_2 = 500$, $v_1 = 1$

1b) Chỉ còn cột 2 chưa có nhân tử nên $t = 2$ và nhân tử cột 2 là

$$v_2 = \min\left\{\frac{u_2}{c_{22}}\right\} = \frac{500}{480} = \frac{25}{24}$$

Ô (2,2) là ô chọn tiếp theo.

1c) Chỉ còn hàng 1 chưa có nhân tử nên $r = 1$ và nhân tử hàng 1 là

$$u_1 = \max\{c_{1j}v_j : j = 1,2\} = 440$$

Ô (1,1) là ô chọn tiếp theo.

Tính được : $z = \dfrac{440 + 500}{1 + \dfrac{25}{24}} = \dfrac{22560}{49} \approx 460{,}408$

S.Phẩm / X.Nghiệp	Quần 1	Áo 1	
XN I: 1	440 × $x_{11} = 1$	420 $x_{12} = 0$	$u_1 = 440$
XN II: 1	500 × $x_{21} = \frac{2}{49}$	480 × $x_{22} = \frac{47}{49}$	$u_2 = 500$
	$v_1 = 1$	$v_2 = \frac{25}{24}$	

Tính được $x_{11} = 1 \geq 0,\ x_{12} = 0 \geq 0,\ x_{21} = \dfrac{2}{49} \geq 0,\ x_{22} = \dfrac{47}{49} \geq 0$ nên giả phương án này là phương án tối ưu.

Thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số quần áo hoàn thành hợp đồng: $T = \dfrac{50000}{\dfrac{22560}{49}} \approx 108{,}6$ ngày

b) $X_{11} = x_{11} \times T \approx 108{,}6$; $X_{12} = x_{12} \times T = 0$; $X_{21} = x_{21} \times T = \dfrac{625}{141} \approx 4{,}43$;

$X_{22} = x_{22} \times T = \dfrac{625}{6} \approx 104{,}16$

S.Phẩm / X.Nghiệp	Quần 1	Áo 1
XN I: 1	440 $X_{11} \approx 108{,}6$	420 $X_{12} = 0$
XN II: 1	500 $X_{21} = \dfrac{625}{141} \approx 4{,}43$	480 $X_{22} = \dfrac{625}{6} \approx 104{,}16$

Phân công trình tự sản xuất quần áo cho các xí nghiệp như sau: Xí nghiệp I chỉ sản xuất quần, (khoảng 108,6 ngày); xí nghiệp II sản xuất áo trước (khoảng 104,16 ngày- đủ 50.000 áo), sau đó chuyển sang sản xuất quần (khoảng 4,43 ngày- cùng xí nghiệp I sản xuất đủ 50.000 quần).

§ 3 TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT CỦA BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

Trong mục **§ 1** ta giả thiết rằng mỗi loại máy chỉ có 1 chiếc và mỗi sản phẩm chỉ gồm 1 chi tiết mỗi loại. Trong mục này , ta xét bài toán tổng quát : Máy M_i có r_i chiếc ($i = \overline{1,m}$) và mỗi sản phẩm cần s_j chi tiết C_j ($j = \overline{1,n}$).

- Trường hợp máy M_i có r_i chiếc và năng suất 1 máy khi sản xuất chi tiết C_j là c_{ij} . Khi đó ta xem r_i chiếc máy này như " một chiếc máy " M_i' *qui ước* có năng suất là $C_{ij}' = r_i c_{ij}$.

- Trường hợp mỗi sản phẩm cần s_j chi tiết C_j , khi đó ta xem s_j chi tiết C_j như "một chi tiết" C_j' *qui ước* và năng suất so với trước là $C_{ij}' = \dfrac{c_{ij}}{s_j}$.

- *Kết hợp hai trường hợp trên ta được* : Bài toán máy M_i có r_i chiếc, mỗi sản phẩm cần s_j chi tiết C_j , ma trận năng suất $(c_{ij})_{mxn}$ *được đưa về* bài toán máy M_i' có 1 chiếc, mỗi sản phẩm cần 1 chi tiết C_j', ma trận năng suất *quy ước* $(C_{ij}')_{mxn}$ với $C_{ij}' = \dfrac{r_i c_{ij}}{s_j}$. Tức là, khi nhân hàng i cho r_i và chia cột j cho s_j thì ta đưa bài toán SXĐB tổng quát về bài toán SXĐB mà mỗi máy có đúng 1 chiếc và mỗi sản phẩm cần đúng 1 chi tiết mỗi loại. Phương án tối ưu hai bài toán như nhau.

Ví dụ 3 Giải bài toán sản xuất đồng bộ sau

C.tiết / Máy	C_1 2	C_2 1	C_3 2
M_1 : 1	10	6	8
M_2 : 3	8	3	6
M_3 : 2	5	4	7

Giải

Trước tiên, ta đưa bài toán về dạng mỗi máy có một chiếc và mỗi sản phẩm cần đúng 1 chi tiết mỗi loại. Nhân hàng 2 cho 3, hàng 3 cho 2 ; chia cột 1 cho 2, cột 3 cho 2 ta được bài toán quy ước.

C.tiết \ Máy	C'_1 1	C'_2 1	C'_3 1	
M'_1 1	5	6 ×	4	$u_1 = 8$
M'_2 1	12 ×	9 ×	9 ×	$u_2 = 12$
M'_3 1	5	8 ×	7	$u_3 = 32/3$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 12/9$	$v_3 = 12/9$	

Bước 1 Xây dựng hệ thống nhân tử các ô chọn.

1a) Ô có cước phí lớn nhất là ô (2.1) với $c_{21} = 12$, $u_2 = 12$, $v_1 = 1$. Ô chọn đầu tiên là ô (2,1).

1b) Trên hàng 2 : max $\{c_{2j} : j = 2, 3\} = 9 = c_{22}$. Nhân tử cột 2 là $v_2 = \min\{ \frac{u_i}{c_{i2}} : i = 2\} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Ô chọn thứ 2 là ô (2,2).

1c) Trên cột 2 : max $\{C_{i2} : i = 1, 3\} = 8 = c_{32}$. Nhân tử hàng 3 là $u_3 = \max\{c_{3j}\, v_j : j = 1, 2\} = 8.\frac{12}{9} = 32/3 = c_{32} . v_2$. Ô chọn thứ 3 là (3,2).

1b) Trên hàng 3 : max $\{c_{3j} : j = 3\} = 7 = c_{33}$. Nhân tử cột 3 là $v_3 = \min\{ \frac{u_i}{c_{i3}} : i = 2, 3\} = \frac{12}{9} = \frac{u_2}{c_{23}}$. Ô chọn thứ tư là (2,3).

1c) Chỉ còn xác định nhân tử hàng 1: $u_1 = \max\{c_{1j}\, v_j : j = 1, 2, 3\} = 8$. Ô chọn thứ năm là (1,2)

Bước 2 Xác định giá phương án

$$Z = \frac{8 + 12 + \frac{32}{3}}{1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{92}{11}.\ \ S = \{(1,2); (2,1); (2,2); (2,3); (3,2)\}$$

$x_{ij} = 0$, $\forall(i,j) \notin S$. Lập hệ phương trình

$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{32} = 1 \\ 12.x_{21} = 92/11 \\ 9x_{23} = 92/11 \\ 6x_{12} + 9x_{22} + 8x_{32} = 92/11 \end{cases}$$

Do $x_{12} = 1$, $x_{32} = 1$ và phương trình cuối cùng ta được $x_{22} < 0$ nên giả phương án này chưa là phương án.

Bước 4 Điều chỉnh nhân tử.

- Ô đưa ra là ô (2,2).
- Đánh dấu "+" vào hàng 2, đánh dấu "-" vào cột 2. Dựa vào hàng 2 và ô chọn (2,1), (2,3) ta đánh dấu "+" vào cột 1,cột 3. Các hàng và cột còn lại đánh dấu "-".

C.tiết / Máy	C'_1 1	C'_2 1	C'_3 1	
M'_1 1	5	6 ×	4	$u_1 = 8$ "-"
M'_2 1	12 ×	9 ×	9 ×	$u_2 = 12$ "+"
M'_3 1	5	8 ×	7	$u_3 = 32/3$ "-"
	$v_1 = 1$ "+"	$v_2 = 12/9$ "-"	$v_3 = 12/9$ "+"	

- Các ô (-,+) gồm (1,1), 1,3), (3,1), (3,3)

$$\lambda = \min\left\{\frac{8}{5.1};\frac{8}{4.4/3};\frac{32}{3.5};\frac{32}{3.7.4/3}\right\} = \frac{8}{7} = \frac{u_3}{c_{33}v_3}$$. Ô đưa vào là ô (3,3).

- Nhân u_2 cho $\frac{8}{7}$; nhân v_1 , v_3 cho $\frac{8}{7}$ ta được hệ thống nhân tử và ô chọn mới là

C.tiết / Máy	C'_1 1	C'_2 1	C'_3 1	
M'_1 1	5	6 ×	4	$u_1 = 8$
M'_2 1	12 ×	9	9 ×	$u_2 = \frac{96}{7}$
M'_3 1	5	8 ×	7 ×	$u_3 = 32/3$
	$v_1 = \frac{8}{7}$	$v_2 = 4/3$	$v_3 = \frac{32}{21}$	

$$Z = \frac{8+\frac{96}{7}+\frac{32}{3}}{\frac{8}{7}+\frac{4}{3}+\frac{32}{21}} = \frac{170}{21}.$$ $S = \{(1,2); (2,1); (2,2); (2,3); (3,2)\}$

$x_{ij} = 0$, $\forall(i,j) \notin S$. Lập hệ phương trình

$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{21} + x_{23} = 1 \\ x_{32} + x_{33} = 1 \\ 12.x_{21} = 170/21 \\ 9x_{23} + 7x_{33} = 170/21 \\ 6x_{12} + 8x_{32} = 170/21 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được : $x_{12} = 1$, $x_{21} = 85/126$, $x_{23} = 41/126$, $x_{33} = 31/42$, $x_{32} = 11/42$.

Đến đây $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$) nên giả phương án này là PATƯ bài toán SXĐB.

Vậy PATƯ của bài toán SXĐB là :

C.tiết / Máy	C_1 2	C_2 1	C_3 2
M_1 : 1	10	6 1	8
M_2 : 3	8 85/126	3	6 41/126
M_3 : 2	5	4 11/42	7 31/42

Tổng sản phẩm sản xuất được trong ca là $z = \dfrac{170}{21}$.

Ví dụ 4 Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho một hệ thống khách sạn 540 ***bộ bàn ghế tủ*** (mỗi bộ gồm 1 bàn, 4 ghế, 1 tủ). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn, ghế, tủ được cho trong bảng sau (bàn/ngày, ghế/ngày, tủ/ ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	ghế 4	Tủ 1
XN I: 1	40	80	28
XN II: 1	32	72	20

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ bàn ghế tủ*** nhất ? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số ***bàn ghế tủ*** hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn ghế trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế, hoặc tủ) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn, hoặc tủ). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất ***bàn ghế tủ*** cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Giải

Đây là bài toán dạng "Bài toán sản xuất đồng bộ", mỗi bộ gồm 1 bàn, 4 ghế và 1 tủ.

Đưa bài toán về dạng bài toán SXĐB dạng chuẩn

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	Ghế(quy ước) 1	Tủ 1	
XN I: 1	40 ×	20	28 ×	$u_1 = 40$
XN II: 1	32 ×	18 ×	20	$u_2 = 32$
	$v_1 = 1$	$v_2 = \frac{16}{9}$	$v_3 = \frac{10}{7}$	

1a) $\max\{c_{ij} : i = 1,2; j = 1,2,3\} = 40 = c_{11}$ nên ô chọn đầu tiên là ô (1,1), $u_1 = 40$, $v_1 = 1$

1b) $k = 1$: $\max\{c_{1j} : j = 2,3\} = \max\{20,28\} = 28 = c_{13}$

Nhân tử cột 3 là $v_3 = \min\left\{\frac{u_1}{c_{13}}\right\} = \frac{40}{28} = \frac{10}{7}$; ô (1,3) là ô chọn tiếp theo

1c) Chỉ còn hàng 2 chưa có nhân tử nên $r = 2$ và nhân tử hàng 2 là

$u_2 = \max\{c_{2j}v_j : j = 1,3\} = \max\left\{32, 20 \times \frac{10}{7}\right\} = 32 = c_{21}v_1$. Ô (21) là ô chọn tiếp theo.

1b) Chỉ còn cột 2 chưa có nhân tử nên $t = 2$ và nhân tử cột 2 là

$$v_2 = \min\left\{\frac{u_1}{c_{12}}, \frac{u_2}{c_{22}}\right\} = \min\left\{\frac{40}{20}, \frac{32}{18}\right\} = \frac{16}{9} = \frac{u_2}{c_{22}}$$

Ô (2,2) là ô chọn tiếp theo.

Tính được : $z = \dfrac{40+32}{1+\frac{16}{9}+\frac{10}{7}} = \dfrac{4536}{265} \approx 17{,}12$

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	Ghế(quy ước) 1	Tủ 1	
XN I: 1	40 × $x_{11} = \frac{103}{265}$	20 $x_{12} = 0$	28 × $x_{13} = \frac{162}{265}$	$u_1 = 40$
XN II: 1	32 × $x_{21} = \frac{13}{265}$	18 × $x_{22} = \frac{252}{265}$	20 $x_{23} = 0$	$u_2 = 32$
	$v_1 = 1$	$v_2 = \frac{16}{9}$	$v_3 = \frac{10}{7}$	

Tính được $x_{11} = \dfrac{103}{265} \geq 0,\ x_{12} = 0 \geq 0,\ x_{13} = \dfrac{162}{265} \geq 0, x_{21} = \dfrac{13}{265} \geq 0,\ x_{22} = \dfrac{252}{265} \geq 0,$ $x_{23} = 0 \geq 0$ nên giả phương án này là phương án tối ưu.

Thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số quần áo hoàn thành hợp đồng: $T = \dfrac{540}{\frac{4536}{265}} = \dfrac{1325}{42} \approx 31{,}54$ ngày

b) $X_{11} = x_{11} \times T = \dfrac{515}{42} \approx 12{,}26$; $X_{12} = x_{12} \times T = 0$; $X_{13} = x_{13} \times T = \dfrac{135}{7} \approx 19{,}28$; $X_{21} = x_{21} \times T = \dfrac{65}{42} \approx 1{,}54$; $X_{22} = x_{22} \times T = 30$, $X_{23} = 0$

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	ghế 4	Tủ 1
XN I: 1	40 $X_{11} = \frac{515}{42} \approx 12{,}26$	80 $X_{12} = 0$	28 $X_{13} = \frac{135}{7} \approx 19{,}28$
XN II: 1	32 $X_{21} = \frac{65}{42} \approx 1.54$	72 $X_{22} = 30$	20 $X_{23} = 0$

Phân công trình tự sản xuất bàn ghế tủ cho các xí nghiệp như sau: Xí nghiệp I sản xuất tủ trước (khoảng 19,28 ngày-đủ 540 tủ), sau khi sản xuất tủ xong sẽ chuyển sang sản xuất bàn(khoảng 12,26 ngày); xí nghiệp II sản xuất ghế trước (khoảng 30 ngày- đủ 2160 ghế), sau khi sản xuất ghế xong sẽ chuyển sang sản xuất bàn (khoảng 1,54 ngày- cùng xí nghiệp I sản xuất đủ 540 bàn).

Ví dụ 5

Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho một trường học 820 ***bộ bàn ghế*** (mỗi bộ gồm 1 bàn, 3 ghế). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn, ghế được cho trong bảng sau (bàn/ngày, ghế/ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	ghế 3
XN I: 1	40	64
XN II: 1	32	48

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ bàn ghế*** nhất ? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số bàn ghế hoàn thành hợp đồng.

Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn ghế trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất bàn ghế cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Giải

Đây là bài toán dạng "Bài toán sản xuất đồng bộ", mỗi bộ gồm 1 bàn và 3 ghế ,

Đưa bài toán về dạng bài toán SXĐB dạng chuẩn mỗi chi tiết cần 1 đơn vị

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế(quy ước) 1	
XN I: 1	40 × $x_{11} = \frac{-4}{23}$	$\frac{64}{3}$ × $x_{12} = \frac{27}{23}$	$u_1 = 40$ "+"
XN II: 1	32 × $x_{21} = 1$	16 $x_{22} = 0$	$u_2 = 32$ "-"
	$v_1 = 1$ "-"	$v_2 = \frac{15}{8}$ "+"	

1a) $\max\{c_{ij} : i = 1,2; j = 1,2\} = 40 = c_{11}$ nên ô chọn đầu tiên là ô (1,1), $u_1 = 40$, $v_1 = 1$

1b) Chỉ còn cột 2 chưa có nhân tử nên $t = 2$.

Nhân tử cột 2 là $v_2 = \min\left\{\frac{u_1}{c_{12}}\right\} = \frac{40}{64/3} = \frac{15}{8}$; ô (1,2) là ô chọn tiếp theo.

1c) Chỉ còn hàng 2 chưa có nhân tử nên $r = 2$ và nhân tử hàng 2 là

$u_2 = \max\{c_{2j}v_j : j = 1,2\} = \max\left\{32 \times 1, 16 \times \frac{15}{8}\right\} = 32 \times 1 = 32 = c_{21}v_1$. Ô (2,1) là ô chọn tiếp theo.

Tính được : $z = \frac{40+32}{1+\frac{15}{8}} = \frac{576}{23}$, $S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

Dựa vào $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=\overline{1,2} \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = z,\ \mathrm{j}=\overline{1,2}\end{array}\right\} \text{voi (i, j)} \in \mathrm{S} \\ \qquad x_{ij} = 0, \text{voi (i, j)} \notin \mathrm{S}\end{array}\right.$, với S là tập các ô chọn "×"

Tính được $x_{11} = \dfrac{-4}{23} < 0$, $x_{12} = \dfrac{27}{23} > 0$, $x_{21} = 1 \geq 0$, $x_{22} = 0 \geq 0$. Vì $x_{11} = \dfrac{-4}{23} < 0$ nên giả phương án này không là phương án tối ưu.

Ô đưa ra là ô (1,1) = (i^o, j^o)

$$\lambda = \min\left\{\frac{u_i}{C_{ij}v_j} : (i,j) = (2,2)\right\} = \min\left\{\frac{32}{16\times\frac{15}{8}}\right\} = \frac{16}{15} = \frac{u_2}{c_{22}v_2}.$$ Ô đưa vào là ô (2,2).

Sửa nhân tử

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế(quy ước) 1	
XN I: 1	40 $x_{11} = 0$	$\frac{64}{3}$ × $x_{12} = 1$	$u_1 = \frac{128}{3}$
XN II: 1	32 × $x_{21} = \frac{7}{9}$	16 × $x_{22} = \frac{2}{9}$	$u_2 = 32$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	

Tính được : $z = \dfrac{\frac{128}{3} + 32}{1+2} = \dfrac{224}{9} \approx 25$, $S = \{,(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Dựa vào $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=\overline{1,2} \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = z,\ \mathrm{j}=\overline{1,2}\end{array}\right\} \text{voi (i, j)} \in \mathrm{S} \\ \qquad x_{ij} = 0, \text{voi (i, j)} \notin \mathrm{S}\end{array}\right.$, với S là tập các ô chọn "×"

Tính được $x_{11} = 0 \geq 0$, $x_{12} = 1 > 0$, $x_{21} = \dfrac{7}{9} \geq 0$, $x_{22} = \dfrac{2}{9} \geq 0$ nên giả phương án này là phương án tối ưu.

Thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số ***bàn ghế*** hoàn thành hợp đồng: $T = \dfrac{820}{\frac{224}{9}} = \dfrac{1845}{56} \approx 33$ ngày

b) $X_{11} = x_{11} \times T = 0$; $X_{12} = x_{12} \times T \approx 33$; $X_{21} = x_{21} \times T \approx 25{,}7$; $X_{22} = x_{22} \times T \approx 7{,}3$

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế 3
XN I: 1	40 $X_{11} = 0$	64 $X_{12} \approx 33$
XN II: 1	35 $X_{21} = 25{,}7$	48 $X_{22} = 7{,}3$

Phân công trình tự sản xuất bàn ghế cho các xí nghiệp như sau: Xí nghiệp I chỉ sản xuất ghế (khoảng 33 ngày), xí nghiệp II sản xuất bàn trước (khoảng 25,7 ngày-đủ 820 bàn), sau khi sản xuất bàn xong sẽ chuyển sang sản xuất ghế (khoảng 7,3 ngày) (việc làm tròn số dẫn đến sai số không đáng kể).

Bài tập

Bài 4.1 Giải bài toán SXĐB cho bởi bảng sau:

CT / M	C_1 1	C_2 1	C_3 1
M_1 : 1	29	20	40
M_2 : 1	24	35	16
M_3 : 1	38	22	43

Bài 4.2 Một công ty nhận hợp đồng sản xuất 740 giá sách và 1480 bộ bàn ghế. Xí nghiệp có ba phân xưởng : I, II, III cùng có khả năng sản xuất các mặt hàng trên. Năng suất của mỗi phân xưởng đối với mỗi mặt hàng (giá sách, bàn, ghế) được cho bởi ma trận.

$$C = \begin{pmatrix} 29 & 40 & 80 \\ 24 & 70 & 32 \\ 38 & 44 & 86 \end{pmatrix} \qquad c_{ij} \text{ tính theo chiếc/ tuần.}$$

Cần giao hàng cùng lúc và càng sớm càng tốt. Hãy phân công các phân xưởng sản xuất mỗi loại mặt hàng trong phần thời gian thế nào để thực hiện hợp đồng trên.

Bài 4.3 Công ty may mặc nhận hợp đồng sản xuất 70.500 ba lô du lịch ; 141.000 túi xách phụ nữ và 211.500 cặp học sinh. Công ty có ba phân xưởng; năng suất của mỗi phân xưởng đối với mỗi mặt hàng, tính theo cái/giờ được cho bởi ma trận.

$$C = \begin{pmatrix} 105 & 112 & 165 \\ 107 & 132 & 249 \\ 62 & 76 & 159 \end{pmatrix}$$

Hàng phải giao cùng lúc để xuất khẩu. Hãy phân công các phân xưởng sản xuất mỗi loại sản phẩm trong thời gian thế nào để hoàn thành hợp đồng trong thời gian ngắn nhất.

Bài 4.4 Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho khách hàng 500 bộ bàn ghế. Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn hoặc ghế được cho trong bảng sau (bàn/ngày hoặc ghế/ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	ghế 1
XN I: 1	27	36
XN II: 1	45	54

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều bộ bàn ghế nhất ? Ước tính thời gian trung bình để hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn, vừa sản xuất ghế trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất bàn ghế cho các xí nghiệp như thế nào để hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Bài 4.5 Một công ty may mặc ký hợp đồng giao cho khách hàng 60.000 bộ quần Kaki và áo sơ mi. Công ty có hai xí nghiệp I, II với ***năng suất trung bình*** của mỗi xí nghiệp khi sản xuất quần áo được cho trong bảng sau (áo/ngày, quần/ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	Quần 1	Áo 1
XN I: 1	640	600
XN II: 1	540	480

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều bộ quần áo nhất? Ước tính ***thời gian trung bình*** để hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất quần, vừa sản xuất áo trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất quần (hoặc áo) xong rồi mới chuyển sang sản xuất áo (hoặc quần). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất quần áo cho các xí nghiệp như thế nào để hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Bài 4.6 Một công ty may mặc ký hợp đồng giao cho khách hàng 100.000 ***bộ đồ bảo hộ lao động*** (**mỗi bộ** gồm 1 quần, 1 áo, 2 găng tay). Công ty có hai xí nghiệp I, II với ***năng suất trung bình*** của mỗi xí nghiệp khi sản xuất quần, áo, găng tay được cho trong bảng sau (áo/ngày, quần/ngày, găng tay/ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	Quần 1	Áo 1	Găng tay 2
XN I: 1	480	420	1500
XN II: 1	720	680	1800

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ đồ bảo hộ lao động*** nhất? Ước tính ***thời gian trung bình*** để hoàn thành hợp đồng.

b) Hỏi phải phân công ***trình tự sản xuất*** quần, áo, găng tay cho các xí nghiệp như thế nào để hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Bài 4.7 Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho một trường học 720 ***bộ bàn ghế*** (mỗi bộ gồm 1 bàn, 3 ghế). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn, ghế được cho trong bảng sau (bàn/ngày, ghế/ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	ghế 3
XN I: 1	36	60
XN II: 1	24	42

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ bàn ghế*** nhất ? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số bàn ghế hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn ghế trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất bàn ghế cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Bài 4.8 Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho một hệ thống khách sạn 480 ***bộ bàn ghế tủ*** (mỗi bộ gồm 1 bàn, 4 ghế, 1 tủ). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn, ghế, tủ được cho trong bảng sau (bàn/ngày, ghế/ngày, tủ/ ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	bàn 1	ghế 4	Tủ 1
XN I: 1	36	72	24
XN II: 1	24	64	16

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ bàn ghế tủ*** nhất ? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số ***bàn ghế tủ*** hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn ghế trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế, hoặc tủ) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn, hoặc tủ). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất ***bàn ghế tủ*** cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Bài 4.9 Một công ty đồ gỗ ký hợp đồng giao cho một hệ thống khách sạn 350 ***bộ bàn ghế giường*** (mỗi bộ gồm 1 bàn, 3 ghế, 2 giường). Công ty có hai xí nghiệp I và II với năng suất trung bình của mỗi xí nghiệp khi sản xuất bàn, ghế, giường được cho trong bảng sau (bàn/ngày, ghế/ngày, giường/ ngày)

S.Phẩm / X.Nghiệp	Bàn 1	Ghế 3	Giường 2
XN I: 1	40	90	32
XN II: 1	34	81	28

a) Hỏi phải phân công thời gian sản xuất của các xí nghiệp như thế nào để trong một ngày tạo ra được nhiều ***bộ bàn ghế giường*** nhất? Ước tính thời gian trung bình để công ty sản xuất đủ số ***bàn ghế giường*** hoàn thành hợp đồng.

b) Trong thực tế của dây chuyền sản xuất, để thuận tiện cho việc cung cấp nguyên vật liệu và tổ chức sản xuất, mỗi xí nghiệp không thể vừa sản xuất bàn ghế giường trong tất cả các ngày làm việc, mà phải sản xuất bàn (hoặc ghế, hoặc giường) xong rồi mới chuyển sang sản xuất ghế (hoặc bàn, hoặc giường). Hỏi phải phân công trình tự sản xuất ***bàn ghế giường*** cho các xí nghiệp như thế nào để thuận tiện cho việc tổ chức sản xuất và hoàn thành hợp đồng sớm nhất?

Bài 4.10 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bài toán SXĐB luôn có PATƯ.
B) Bài toán đối ngẫu của bài toán SXĐB luôn có PATƯ.
C) Hàm mục tiêu của bài toán SXĐB luôn bị chặn.
D) Phương án tối ưu của bài toán SXĐB luôn duy nhất.

Chương 5

PHƯƠNG PHÁP SƠ ĐỒ MẠNG PERT-CPM

(Phương pháp hoạch định, lập tiến độ và điều hành dự án)

Để thực hiện một ***dự án*** hay ***công trình*** **hay** ***qui trình sản xuất***, người ta cần tiến hành các hoạt động (công việc) có liên quan chặt chẽ với nhau và phải thực hiện theo một trình tự nhất định, trong một khoảng thời gian nhất định cho đến khi hoàn thành toàn bộ dự án. Mọi công việc đều cần có thời gian và tiêu tốn một lượng ***tài nguyên*** (vốn, nguyên liệu, nhân lực, thiết bị máy móc...) để hoàn thành. Nhằm tối ưu hóa việc sử dụng thời gian và tài nguyên, người ta áp dụng một phương pháp gọi là phương pháp PERT-CPM gồm 3 bước như sau: Lập kế hoạch, điều hành, kiểm tra và hiệu chỉnh (nếu cần).

Bước 1 Lập kế hoạch.

Trong bước này, người ta ***xác định mục tiêu dự án*** rồi dựa vào đó tách dư án ra thành từng công việc cụ thể, xác định thời gian hoàn thành và thứ tự thực hiện các công việc, lượng ***tài nguyên*** cần sử dụng cho mỗi công việc. Tiếp theo, người ta lập ra một sơ đồ mạng lưới để biểu thị các công việc và mối quan hệ giữa chúng. Xác định ***đường găng*** và các ***công việc găng***. Tối ưu hóa trên sơ đồ PERT để đáp ứng các chỉ tiêu về *thời gian hoàn thành* và *giảm chi phí* cho dự án (nếu cần).

Bước 2 Điều hành dự án.

Ở bước này, người ta ***lập bảng chỉ tiêu thời gian cho các công việc***. Phải xác định rõ nhân lực, phương tiện nguyên vật liệu, tài chính,.. cho tất cả các công việc; chỉ rõ thời điểm bắt đầu, thời điểm kết thúc, thời gian dự trữ của các công việc và mối quan hệ giữa chúng. Các *công việc găng* cần tính toán chính xác và chú ý đặc biệt khi thực hiện để toàn bộ dự án được hoàn thành đúng hạn. Vẽ biểu đồ *thời gian-công việc* (biểu đồ GANTL) để tiện cho việc theo dõi điều hành. Bên cạnh biểu đồ *thời gian-công việc* theo kế hoạch, khi điều hành người ta còn vẽ biểu đồ *thời gian-công việc* thực tế đã diễn ra để dễ dàng theo dõi tiến độ thực hiện các công việc và điều chỉnh (nếu cần).

Bước 3 Kiểm tra và điều chỉnh (nếu cần).

Sử dụng sơ đồ mạng lưới, bảng chỉ tiêu thời gian công việc, biểu đồ thời gian- công việc để theo dõi và báo cáo định kỳ tiến triển của dự án. Nếu cần thì phân tích, đánh giá lại ảnh hưởng của những biến động thị trường và môi trường đối với dự án và trên cơ sở đó xác định lại sơ đồ mới cho phần dự án còn lại sao cho tối ưu.

- PERT: Project Evaluation and Review Technique *hay* Program Evaluation and Review Technique.
- PERT-CPM : Project Evaluation and Review Technique – Critical path method

§ 1. DỰ ÁN CÓ THỜI GIAN TẤT ĐỊNH

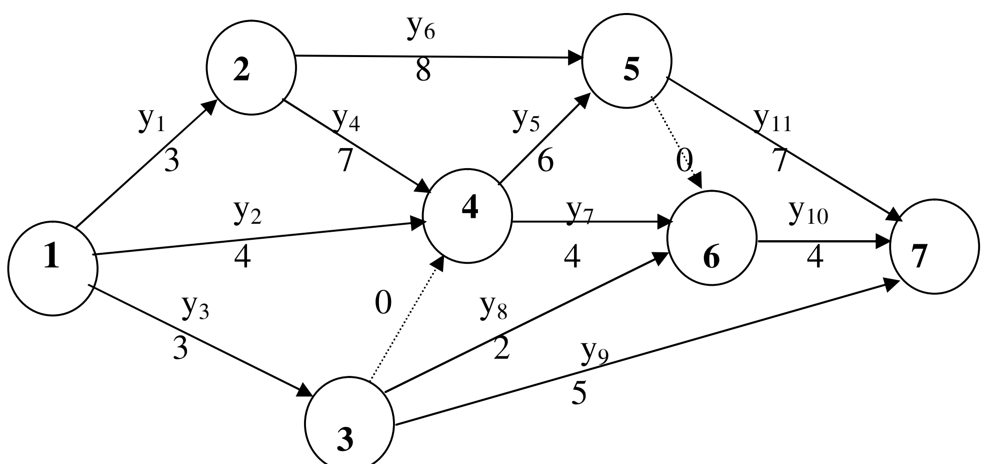
Có hai cách trình bày sơ đồ mạng là ***sơ đồ dạng AON*** (Activity On Node) hoặc ***sơ đồ dạng AOA*** (Activity On Arrow). Trong sơ đồ dạng AON, công việc biểu diễn bằng đỉnh (nút vòng tròn), sự kiện biểu diễn bằng mũi tên. Trong sơ đồ dạng AOA, công việc biểu diễn bằng mũi tên, sự kiện biểu diễn bằng đỉnh(nút vòng tròn). Vì sơ đồ dạng AOA phù hợp hơn(về tâm lý cảm nhận thời gian và sự kiện) đối với hầu hết mọi người nên trong tài liệu này chúng tôi chọn cách trình bày sơ đồ dạng AOA.

1.1. Ví dụ mở đầu

Xét một dự án (công trình) xây dựng gồm một số công việc với các yêu cầu đặt ra cho trong bảng sau:

Công việc	Thời gian cần (tháng)	Thứ tự tiến hành
y_1	3	Bắt đầu ngay
y_2	4	Bắt đầu ngay
y_3	3	Bắt đầu ngay
y_4	7	Sau y_1 hoàn thành
y_5	6	Sau y_2, y_3, y_4 hoàn thành
y_6	8	Sau y_1 hoàn thành
y_7	4	Sau y_2, y_3, y_4 hoàn thành
y_8	2	Sau y_3 hoàn thành
y_9	5	Sau y_3 hoàn thành
y_{10}	4	Sau y_5, y_6, y_7, y_8 hoàn thành
y_{11}	7	Sau y_5, y_6 hoàn thành

Để theo dõi và điều hành công việc, trước tiên người ta lập ra một sơ đồ mạng lưới PERT như sau.

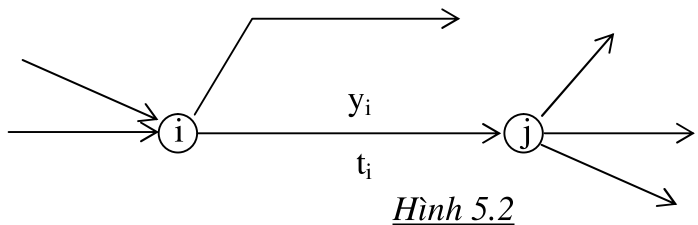


Hình 5.1

1.2. Các khái niệm trong sơ đồ mạng

- ***Công việc – cạnh***: Công việc là hoạt động sử dụng thời gian, nhân lực, vật lực trong quá trình sản xuất, thi công,.... Mỗi công việc được biểu thị bằng một mũi tên thẳng, cong, gẫy khúc tùy ý gọi là một cạnh của sơ đồ. Trên cạnh này ta ghi tên công việc y_i , còn bên dưới ta ghi thời gian cần thiết để hoàn thành công việc này.

- ***Sự kiện- Đỉnh***: Mỗi khi hoàn thành một hay một số công việc và khởi công một hay một số công việc khác gọi là ***một sự kiện***. Mỗi sự kiện được biểu thị bằng một đỉnh của sơ đồ. Các đỉnh được đánh số theo thứ tự 1, 2,...., n và mỗi đỉnh được đặt trong một vòng tròn nhỏ. Sự kiện khởi công dự án, công trình hay qui trình sản xuất gọi là ***sự kiện khởi đầu*** và được đánh số là 1. Sự kiện hoàn thành toàn bộ dự án, công trình hay qui trình sản xuất gọi là ***sự kiện kết thúc*** hay ***sự kiện cuối*** và được đánh số là n.



Hình 5.2

Công việc y_i này còn gọi là công việc (i,j). Đỉnh i gọi là gốc và đỉnh j gọi là ngọn của cạnh (i,j). Cạnh (i,j) gọi là hướng ra đỉnh i và hướng vào đỉnh j.

- ***Công việc giả (ảo)*****:** Là công việc chỉ mối liên hệ về mặt logic kỹ thuật giữa hai hoặc nhiều công việc. Nó cho biết sự khởi công của công việc này phụ thuộc vào sự kết thúc của công việc khác (chẳng hạn việc may quần áo được thực hiện khi việc cắt vải hoàn thành, việc kiểm tra chất lượng thành phẩm chỉ được thực hiện sau khi sản phẩm hoàn thành,...). Công việc giả không cần cả thời gian lẫn nhân lực-vật lực, được biểu diễn bằng một mũi tên không liền nét trên đó ghi thời gian hoàn thành công việc là 0. Trong *hình 5.1* các công việc (3,4) và (5,6) là các công việc ảo. Ngoài công việc giả còn có ***công việc chờ***, là công việc cần thời gian nhưng không cần nhân lực-vật lực.

1.3. Cách đánh số các đỉnh trong sơ đồ mạng

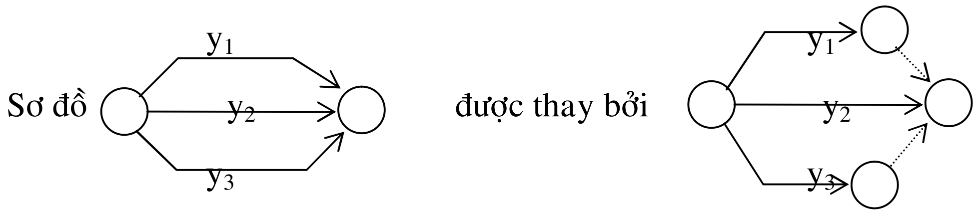
Các đỉnh trong sơ đồ mạng phải đánh số sao cho thỏa điều kiện là cạnh luôn hướng từ đỉnh có số nhỏ đến đỉnh có số lớn.

- ***Sự kiện khởi đầu*** (khởi công dự án, công trình) đánh số 1. Đỉnh này không có cạnh nào hướng tới nó.

- Sau khi một đỉnh đã được đánh số là i, ta xóa tất cả các cạnh có gốc là i. Trong các đỉnh chưa đánh số, đỉnh nào chỉ toàn cạnh hướng ra thì đánh số là i+1. Nếu có nhiều đỉnh chỉ toàn cạnh hướng ra thì đánh số i+1, i+2,...tùy ý cho các đỉnh ấy (do đó , với cùng một dơ đồ mạng, việc đánh số các đỉnh có thể không duy nhất). Cứ tiếp tục như thế cho đến khi tất cả các đỉnh được đánh số.

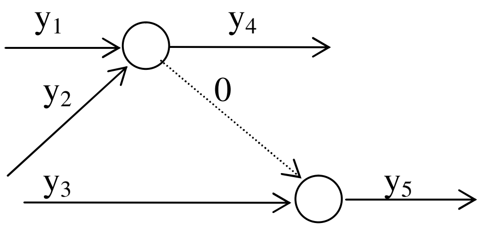
1.4. Một số lưu ý khi lập sơ đồ mạng.

- Giữa hai đỉnh bất kỳ có nhiều nhất 1 cạnh.
- Nếu có nhiều công việc có tính chất giống nhau nối giữa hai sự kiện thì chỉ lấy một công việc có thời gian dài nhất đại diện. Nhưng khi điều hành cần chú ý việc thay thế này.
- Nếu có nhiều công việc có tính chất khác nhau nối giữa hai sư kiện thì ta đưa vào sự kiện giả và công việc giả.



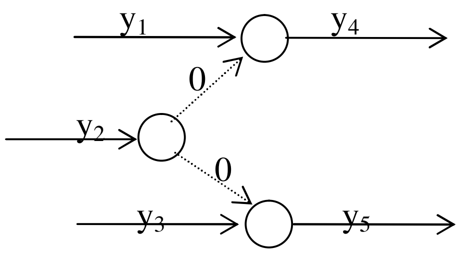
Hình 5.3

- Trường hợp y_4 tiến hành sau khi y_1, y_2 hoàn thành; y_5 tiến hành sau khi y_1, y_2, y_3 thì có thể biểu diễn như sau:



Hình 5.4

- Trường hợp y_4 tiến hành sau khi y_1, y_2 hoàn thành; y_5 tiến hành sau khi y_2, y_3 thì có thể biểu diễn như sau:



Hình 5.5

1.5. Các chỉ tiêu thời gian trên sơ đồ mạng

Gọi U_i^+ là tập các cạnh xuất phát từ đỉnh i; U_i^- là tập các cạnh hướng vào đỉnh i.

1.5.1. Các chỉ tiêu thời gian đối với các sự kiện.

❖ *Thời điểm sớm nhất xuất hiện sự kiện j* : (ký hiệu t_j^s)

- Sự kiện khởi đầu (ứng với đỉnh 1), là sự kiện bắt đầu dự án nên $t_1^s = 0$.

- Với j > 1 thì sự kiện j chỉ xuất hiện khi mọi công việc dẫn đến sự kiện j đều được hoàn thành. Do đó t_j^s bằng độ dài *đường đi dài nhất* từ đỉnh 1 đến đỉnh j. Công thức tính t_j^s như sau:

$$\boxed{\begin{array}{l} t_1^s = 0 \\ t_j^s = \max\ \{\ t_i^s + t_{ij}\ /\ \forall(i,j) \in U_j^-\ \},\ j > 1 \end{array}}$$

❖ *Thời điểm muộn nhất xuất hiện sự kiện j* : (ký hiệu t_j^m)

- ***Sự kiện kết thúc*** (ứng với đỉnh n) là sự kiện hoàn thành toàn bộ dự án. Vì dự án phải hoàn thành đúng thời hạn nên $t_n^m = t_n^s$.
- Với j < n thì t_j^m là thời điểm muộn nhất mà tất cả các công việc dẫn đến sự kiện j đều phải hoàn thành. Nói cách khác, t_j^m phải bảo đảm mọi công việc sau dự kiện j không ảnh hưởng đến thời gian hoàn thành toàn bộ dự án. Rõ ràng là đường đi dài nhất từ j đến n là thời gian cần thiết để hoàn thành tất cả các công việc sau sự kiện j. Do đó ta có công thức tính t_i^m như sau:

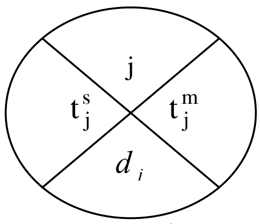
$$\boxed{\begin{array}{l} t_n^m = t_n^s \\ t_i^m = \min\ \{\ t_j^m - t_{ij}\ /\ \forall(i,j) \in U_i^+\ \},\ i < n \end{array}}$$

❖ Thời lượng dự trữ của sự kiện j: (ký hiệu d_j)

Tức là thời lượng mà sự kiện i có thể xê dịch mà không ảnh hưởng đến thời gian hoàn thành dự án.

$$\boxed{d_j = t_j^m - t_j^s}$$

❖ Ghi các chỉ tiêu lên đỉnh: Sau khi đã tính t_j^s, t_j^m, d_j ta ghi các số này lên đỉnh như sau:



❖ ***Đường găng***: Đường dài nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh cuối (đỉnh n) gọi là ***đường găng***. Các công việc và sự kiện nằm trên đường găng gọi là ***công việc găng*** và ***sự kiện găng***.

<u>Chú ý</u> Vì $t_i^m = t_i^s$ với i là sự kiện găng nên đường găng đi qua các sự kiện có thời gian dự trữ bằng 0.

<u>Ví dụ 2</u> Tính thời điểm sớm nhất, thời điểm muộn nhất xuất hiện các sự kiện trong sơ đồ hình 5.1. Tính thời lượng dự trữ của các sự kiện .

- Thời điểm sớm nhất xuất hiện các sự kiện .

$t_1^s = 0$, $t_2^s = \max\ \{t_1^s + t_{12}\} = \max\ \{0+3\} = 3$

$t_3^s = \max\{t_1^s + t_{13}\} = \max\{0+3\} = 3$

$t_4^s = \max\{t_2^s + t_{24}, t_1^s + t_{14}, t_3^s + t_{34}\} = \max\{3+7, 0+4, 3+0\} = 10$

$t_5^s = \max\{t_2^s + t_{25}, t_4^s + t_{45}\} = \max\{3+8, 10+6\} = 16$

$t_6^s = \max\{t_3^s + t_{36}, t_4^s + t_{46}, t_5^s + t_{56}\} = \max\{3+2, 10+4, 16+0\} = 16$

$t_7^s = \max\{t_3^s + t_{37}, t_5^s + t_{57}, t_6^s + t_{76}\} = \max\{3+5, 16+7, 16+4\} = 23$

♦ Thời điểm muộn nhất xuất hiện các sự kiện .

$t_7^m = t_7^s = 23$

$t_6^m = \min\{t_7^m - t_{67}\} = \min\{23-4\} = 19$

$t_5^m = \min\{t_7^m - t_{57}, t_6^m - t_{56}\} = \min\{23-7, 16-0\} = 16$

$t_4^m = \min\{t_5^m - t_{45}, t_6^m - t_{46}\} = \min\{16-6, 19-4\} = 10$

$t_3^m = \min\{t_7^m - t_{37}, t_6^m - t_{36}, t_4^m - t_{34}\} = \min\{23-5, 19-2, 10-0\} = 10$

$t_2^m = \min\{t_4^m - t_{24}, t_5^m - t_{25}\} = \min\{10-7, 16-8\} = 3$

$t_1^m = \min\{t_2^m - t_{12}, t_3^m - t_{13}, t_4^m - t_{14}\} = \min\{3-3, 10-3, 10-4\} = 0.$

♦ Thời lượng dự trữ của các sự kiện.

$d_1 = t_1^m - t_1^s = 0 - 0 = 0$

$d_2 = t_2^m - t_2^s = 3 - 3 = 0$

$d_3 = t_3^m - t_3^s = 10 - 3 = 7$

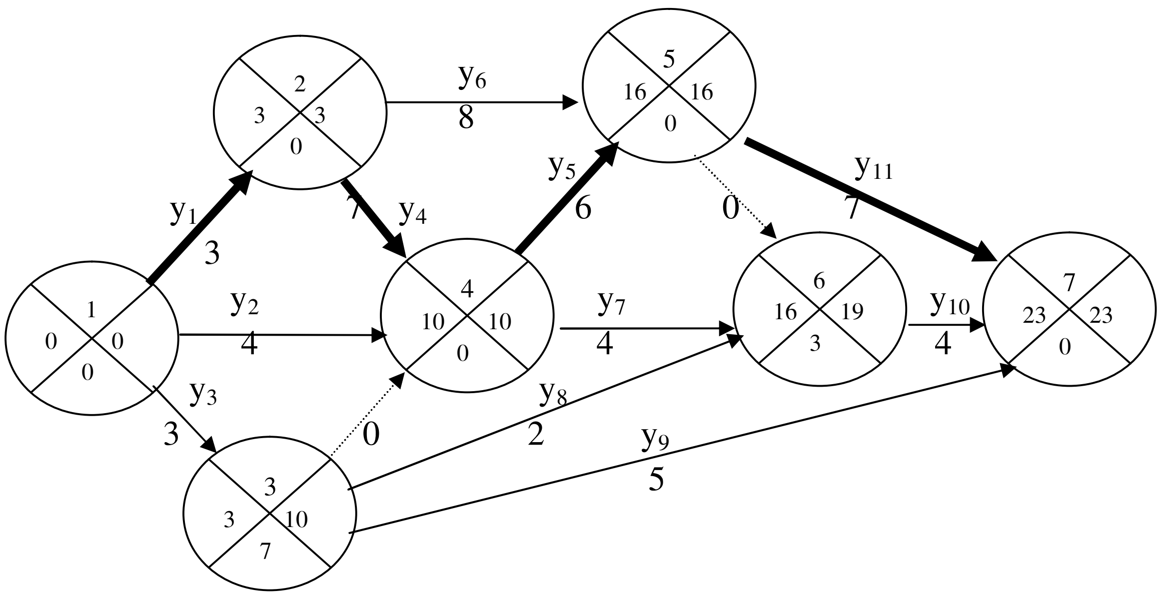
$d_4 = t_4^m - t_4^s = 10 - 10 = 0$

$d_5 = t_5^m - t_5^s = 16 - 16 = 0$

$d_6 = t_6^m - t_6^s = 19 - 16 = 3$

$d_7 = t_7^m - t_7^s = 23 - 23 = 0$

Dựng lại sơ đồ mạng với đầy đủ các chỉ tiêu trên các đỉnh.



Hình 5.6

♦ Đường găng đi qua các đỉnh 1, 2, 4, 5, 7 và được biểu diễn bằng những mũi tên đậm như hình vẽ.

1.5.2. Các chỉ tiêu thời gian đối với công việc

♦ Thời điểm khởi công sớm công việc (i, j) : $t_{ij}^{ks} = t_i^s$

♦ Thời điểm hoàn thành sớm công việc (i, j) : $t_{ij}^{hs} = t_{ij}^{ks} + t_{ij}$.

♦ Thời điểm hoàn thành muộn công việc (i, j) : $t_{ij}^{hm} = t_j^m$

- Thời điểm khởi công muộn công việc (i, j) : $t_{ij}^{km} = t_{ij}^{hm} - t_{ij}$
- Thời gian dự trữ chung của công việc (i, j) ký hiệu d_{ij}^{c} là thời gian tối đa mà công việc (i, j) có thể kéo dài việc thực hiện nhưng không ảnh hưởng đến thời gian hoàn thành toàn bộ dự án: $d_{ij}^{c} = t_j^m - t_i^s - t_{ij}$
- Thời gian dự trữ độc lập công việc (i, j), ký hiệu $d_{ij}^{đl}$, là khoảng thời gian tối đa mà công việc (i, j) có thể kéo dài việc thực hiện nhưng không ảnh hưởng đến thời điểm hoàn thành muộn nhất của các côngviệc diễn ra trước đó (trước sự kiện i) và cũng không ảnh hưởng đến thời điểm khởi công sớm nhất của các công việc diễn ra sau đó (sau sự kiện j): $d_{ij}^{đl} = \max\left\{0, t_j^s - t_i^m - t_{ij}\right\}$

<u>Lưu ý</u> : $d_{ij}^{đl} = 0$ với (i, j) là cộng việc găng

$d_{ij}^{đl} = d_{ij}^{c}$ với (i, j) là công việc nằm giữa hai sự kiện găng.

<u>Ví dụ 3</u> Bảng chỉ tiêu thời gian - công việc của sơ đồ mạng hình 5.6.

Công việc		t_{ij}^{ks}	t_{ij}^{hs}	t_{ij}^{hm}	t_{ij}^{km}	d_{ij}^{c}	$d_{ij}^{đl}$	Nhân lực	...	
y_1	(1, 2)	0	3	3	0	0	0			
y_2	(1, 4)	0	4	10	6	6	6			
y_3	(1, 3)	0	3	10	7	7	0			
y_4	(2, 4)	3	10	10	3	0	0			
y_5	(4, 5)	10	16	16	10	0	0			
y_6	(2, 5)	3	11	16	8	5	5			
y_7	(4, 6)	10	14	19	15	5	2			
y_8	(3, 6)	3	5	19	17	14	4			
y_9	(3, 7)	3	8	23	18	15	7			
y_{10}	(6, 7)	16	20	23	19	3	0			
y_{11}	(5, 7)	16	23	23	16	0	0			

5.3. Biểu đồ thời gian- công việc (sơ đồ PERT ngang, sơ đồ Gantt)

Để bổ sung cho sơ đồ mạng , người ta thành lập biểu đồ *thời gian - công việc* hay còn gọi là *sơ đồ PERT ngang* để giúp cho việc điều hành dự án dễ dàng hơn. Sơ đồ PERT ngang có thể trình bày bởi một trong hai cách sau: ***cách 1*** từ góc trên bên trái xuống hoặc ***cách 2*** từ góc dưới bên trái lên (từ gốc tọa độ ra). ***Cách 1*** phù hợp với tâm lý thị giác của hầu hết mọi người-khi nhìn vào một tờ giấy mắt chúng ta quen nhìn từ góc trên bên trái xuống; ***cách 2*** phù hợp với tâm lý thị giác của người có học toán mà đặc biệt là môn hình học giải tích. Trong tài liệu này chúng tôi trình bày theo cách 2.

Qui tắc thành lập biểu đồ thời gian - công việc theo cách 2 như sau:

- Vẽ góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ. Trục hoành biểu thị thời gian thực hiện công việc, trục tung biểu diễn công việc .

- Mỗi công việc thực hiện được biểu diễn bởi một đoạn thẳng song song với trục hoành . Độ dài của đoạn thẳng biểu diễn thời gian hoàn thành công việc. Công việc giả không cần biểu diễn hoặc biểu diễn bởi một điểm.

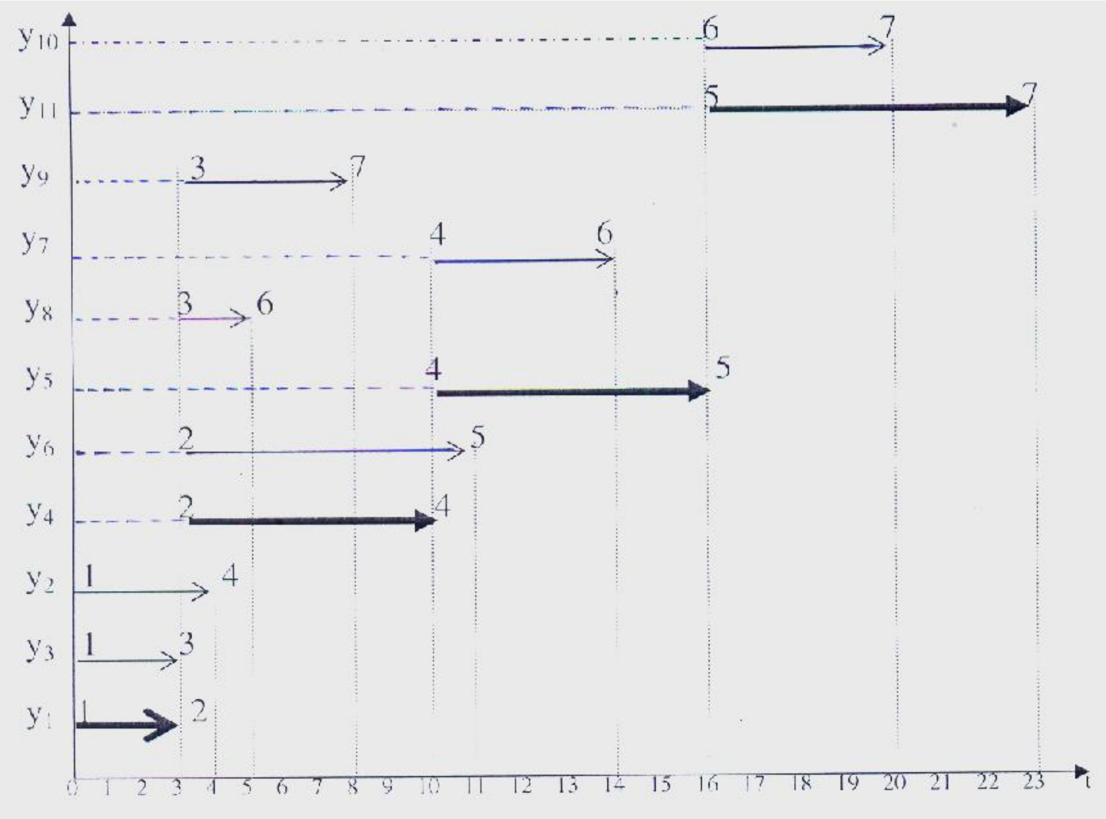
- Các công việc (i,j) được sắp xếp từ dưới lên trên theo thứ tự tăng dần của chỉ số j. Nếu các công việc có cùng chỉ số j thì xếp theo thứ tự tăng dần chỉ số i.

- Khi lập sơ đồ PERT ngang, dựa vào cột thời gian dự trữ độc lập và cột thời gian dự trữ chung trong bảng chỉ tiêu thời gian-công việc, có thể điều chỉnh thời gian thực hiện các công việc không găng sao cho thuận tiện việc quản lý, điều tiết tối ưu các nguồn lực cho dự án và nhờ đó giảm chi phí của dự án.

❖ ***Ưu điểm sơ đồ PERT ngang là*** :

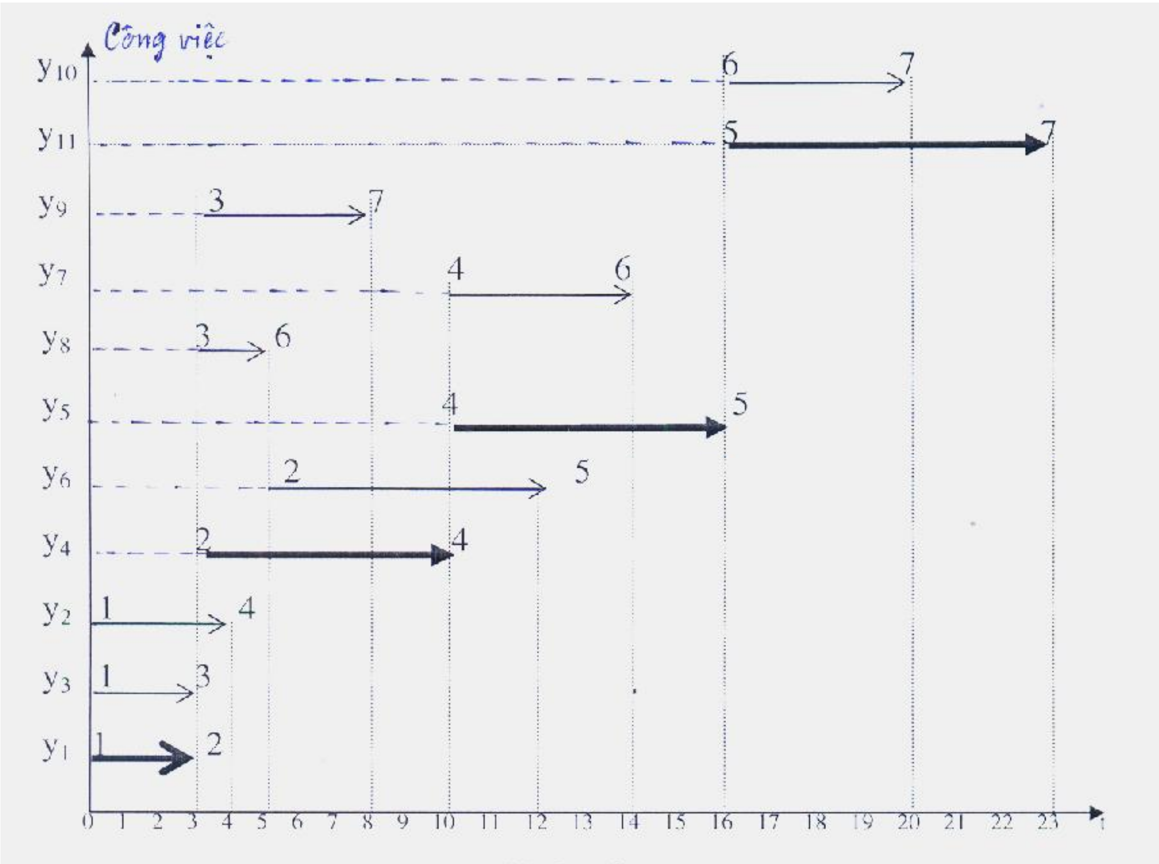
- Giúp người điều hành sắp xếp, điều chỉnh các công việc không găng sao cho giảm bớt áp lực về nguồn *tài nguyên* (nhân lực, nguyên vật liệu, phương tiện kỹ thuật, ...) cung cấp cho dự án và nhờ đó có thể giảm bớt chi phí cho dự án.
- Tại một thời điểm bất kỳ trong thời gian thực hiện dự án, người điều hành có thể biết rõ những công việc nào đã thực hiện xong, công việc nào đang được thực hiện và mức độ tiến triển của mỗi công việc,... để kịp thời có những điều chỉnh hợp lý (nếu cần).

<u>Ví dụ 4</u> Sơ đồ *PERT ngang* ứng với sơ đồ *PERT* hình 5.6 được trình bày trong hình 5.7. dưới đây.



Hình 5.7

Giả sử công việc y_2 cần sử dụng chiếc máy M, công việc y_6 cũng cần sử dụng chiếc máy M, mà công ty chỉ có 1 chiếc. Khi đó sơ đồ PERT ngang hình 5.8 không thỏa mãn điều kiện thi công, và nếu thuê hoặc mua thêm một chiếc nữa thì tốn thêm nhiều chi phí làm cho giá thành công trình tăng lên. Để giải quyết vấn đề này, chúng ta điều chỉnh sơ đồ PERT ngang bằng cách dựa vào bảng chỉ tiêu thời gian-công việc. Trên bảng chỉ tiêu thời gian-công việc, chúng ta thấy công việc y_6 có 5 tháng dự trữ độc lập, nên có thể dời công việc y_6 khởi công trễ hơn 2 tháng mà không ảnh hưởng đến các công việc khác và thời gian hoàn thành toàn bộ dự án đồng thời giá thành dự án vẫn giữ nguyên. Chúng ta có sơ đồ PERT ngang mới như sau.



Hình 5.8

❖ ***Chú ý*** Có thể vẽ sơ đồ PERT ngang theo chiều từ trái sang phải và từ trên xuống cho phù hợp với tâm lý thị giác của những người không hoặc ít làm toán cũng có thể xem sơ đồ dễ dàng hơn.

§2. DỰ ÁN CÓ TÍNH NGẪU NHIÊN

Trong các mục §1, ta xem thời gian thực hiện các công việc t_{ij} là hoàn toàn tất định khi lập sơ đồ mạng để điều hành dự án. Do đó mô hình có được là mô hình tất định. Trong thực tế, do các yếu tố khách quan (biến động về nguyên vật liệu, nguồn nhân lực,...), nên thời gian hoàn thành các công việc là đại lượng ngẫu nhiên mà ta chỉ có thể biết được phân phối xác suất thông qua kinh nghiệm và số liệu thống kê. Do đó mô hình thực tế là mô hình ngẫu nhiên hay mô hình xác suất. Khi đó việc tính toán các chỉ tiêu để điều hành dự án bao gồm: Tính kỳ vọng và phương sai các đại lượng ngẫu nhiên; ***tính xác suất để dự án hoàn thành đúng thời hạn qui định T_{qd} cho trước***. *Việc lập và điều hành dự án có tính ngẫu nhiên được thực hiện như sau.*

Trước tiên, người ta lập bảng chi tiết các công việc cần thực hiện và trình tự thực hiện. Xác định thời gian hoàn thành từng công việc được dựa vào 3 loại:

- *Thời gian lạc quan* , ký hiệu a, là thời gian ước tính hoàn thành công việc khi mọi việc diễn ra thuận lợi.
- *Thời gian bi quan,* ký hiệu là b, là thời gian ước tính hoàn thành công việc khi gặp nhiều bất lợi.
- *Thời gian hợp lý nhất,* ký hiệu m, là thời gian hiện thực nhất. Nói cách khác, đó là thời gian có xác suất lớn nhất, đỉnh cao của hàm mật độ.

Trong thực tế, để xác định các ước lượng a, b, m này người ta làm như sau :

  - Dựa vào kinh nghiệm của những người thực hiện dự án.
  - Dựa vào các số liệu thống kê.
  - Hỏi ý kiến các chuyên gia trong lĩnh vực liên quan đến dự án cần thực hiện. Đối với các dự án mà bản thân người thực hiện ít kinh nghiệm và số liệu thống kê cũng nghèo nàn thì hỏi ý kiến các chuyên gia là phù hợp nhất.

Sau khi đã có a, b, m thì thời gian trung bình để hoàn thành các công việc được tính theo công thức (giả thiết $\frac{a+b}{2}$ chiếm tỷ trọng bằng nửa thời gian hợp lý nhất m)

$$\boxed{\bar{t} = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{2} + 2m\right) = \frac{1}{6}(a+b+4m)}$$

Nếu giả thiết thời gian hoàn thành mỗi công việc là đại lượng ngẫu nhiên T có ***phân phối Bêta (β)*** thì kỳ vọng E(T) và phương sai Var(T) tính theo công thức

$$\boxed{E(T) = \bar{t} = \frac{1}{6}(a + 4m + b)}$$

$$\boxed{Var(T) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 = \sigma^2}$$

Tiếp theo, ta lập bảng chi tiết các công việc cần thực hiện, trình tự thực hiện và các yêu cầu về mặt thời gian.

Tên công việc	Thứ tự thực hiện	Thời gian lạc quan a	Thời gian hợp lý m	Thời gian bi quan b	$E(T) = \bar{t}$	Var(T)
Y_1 ⋮ ⋮ Y_n	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Dựa vào bảng này và xem thời gian hoàn thành mỗi công việc là $\bar{t}$ ta lập sơ đồ PERT, xác định đường găng và công việc găng, tính chỉ tiêu thời gian cho các công việc.

Giả sử thời gian hoàn thành toàn bộ dự án là đại lượng ngẫu nhiên T có ***phân phối chuẩn***. Khi đó :

- Thời gian trung bình hoàn thành dự án là kỳ vọng E(T) và bằng với độ dài đường găng : $\boxed{E(T) = \text{độ dài đường găng}}$
- Phương sai : $Var(T) = \sum_{(i,j)\in G} Var(T_{ij})$, với G là tập các công việc trên đường găng.
- Độ lệch chuẩn: $\sigma(T) = \sqrt{Var(T)}$

- Xác suất để hoàn thành toàn bộ dự án trong khoảng thời gian từ T_1 đến T_2 cho trước là:

$$P(T_1 \leq T \leq T_2) = \varphi\left(\frac{T_2 - E(T)}{\sigma(T)}\right) - \varphi\left(\frac{T_1 - E(T)}{\sigma(T)}\right)$$

- Xác suất để hoàn thành toàn bộ dự án đúng thời gian hạn qui định $T_{qđ}$ cho trước là:

$$P(T \leq T_{qđ}) = \varphi\left(\frac{T_{qđ} - E(T)}{\sigma(T)}\right) + \varphi\left(\frac{E(T)}{\sigma(T)}\right)$$

Ví dụ 5 Bảng sau đây cho biết các công việc phải làm khi lắp đặt hệ thống nhà xưởng mới cho sản xuất. Trong đó :

a- là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách lạc quan.

m- là thời gian ước tính hoàn thành công việc trong điều kiện bình thường

b- Thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách bi quan nhất.

Công việc	a (ngày)	m (ngày)	b (ngày)	Trình tự tiến hành
Y_1	4	5,5	10	Bắt đầu ngay
Y_2	2	4	6	Bắt đầu ngay
Y_3	1	2	3	Bắt đầu ngay
Y_4	6	7	8	Sau Y_3
Y_5	2	4	6	Sau Y_2 và Y_4
Y_6	6	10	14	Sau Y_1 và Y_5
Y_7	2	2,5	6	Sau Y_1 và Y_5
Y_8	3	6	9	Sau Y_6
Y_9	10	11	12	Sau Y_7
Y_{10}	14	15,5	20	Sau Y_3
Y_{11}	2	7,5	10	Sau Y_8 và Y_9

a) Hãy tính kỳ vọng và phương sai cho các đại lượng ngẫu nhiên biểu thị thời gian hoàn thành công việc.

b) Lập sơ đồ PERT và xác định đường găng .

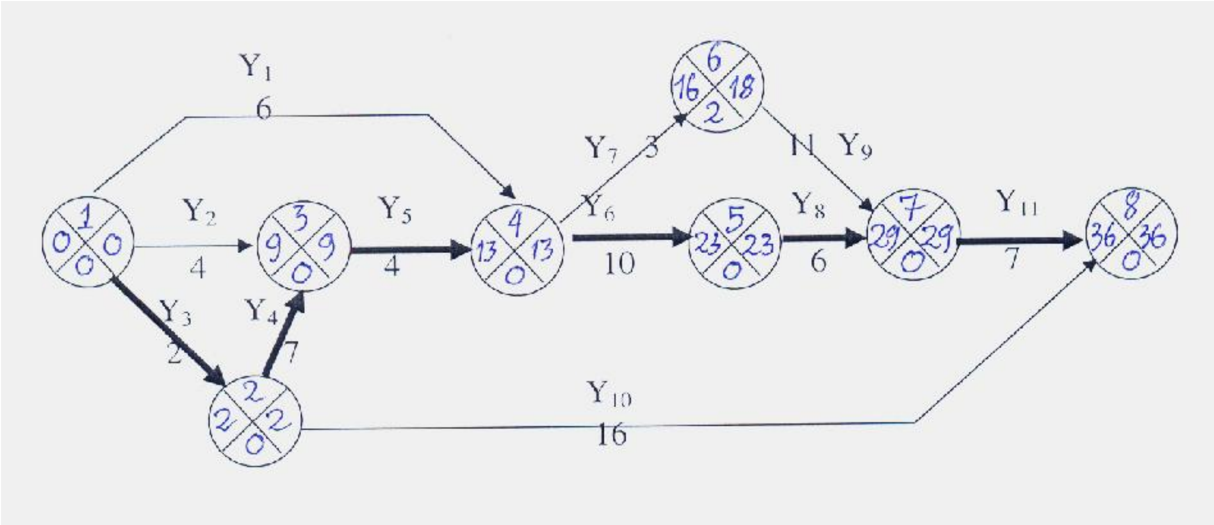
c) Tính xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 40 ngày.

<u>Giải</u>

a) Kỳ vọng và phương sai cho các đại lượng ngẫu nhiên biểu thị thời gian hoàn thành công việc: $E(T)=\dfrac{a+4m+b}{6}$, $Var(T) = \left(\dfrac{b-a}{6}\right)^2 = \sigma^2$

Công việc	a (ngày)	m (ngày)	b (ngày)	E(T)	Var(T)	Trình tự tiến hành
Y_1	4	5,5	10	6	1	Bắt đầu ngay
Y_2	2	4	6	4	16/36	Bắt đầu ngay
Y_3	1	2	3	2	4/36	Bắt đầu ngay
Y_4	6	7	8	7	4/36	Sau Y_3
Y_5	2	4	6	4	16/36	Sau Y_2 và Y_4
Y_6	6	10	14	10	64/36	Sau Y_1 và Y_5
Y_7	2	2,5	6	3	16/36	Sau Y_1 và Y_5
Y_8	3	6	9	6	1	Sau Y_6
Y_9	10	11	12	11	4/36	Sau Y_7
Y_{10}	14	15,5	20	16	1	Sau Y_3
Y_{11}	2	7,5	10	7	64/36	Sau Y_8và Y_9

b) Lập sơ đồ PERT và xác định đường găng.



Đường găng đi qua các đỉnh 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 và có chiều dài là 36.

c) Tính xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 40 ngày.

- Thời gian trung bình hoàn thành dự án : E(T) = 36
- Phương sai: $\mathrm{Var}(T) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{16}{36} + \frac{64}{36} + \frac{36}{36} + \frac{64}{36} = \frac{17}{3}$
- Độ lêch chuẩn : $\sigma(T) = \sqrt{\mathrm{Var}(T)} = \sqrt{\frac{17}{3}} \approx 2{,}38$
- Xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 40 ngày là $P(T \leq 40) = \varphi\left(\frac{40-36}{2{,}38}\right) + \varphi\left(\frac{36}{2{,}38}\right) = 0{,}4535 + 0{,}5 = 0{,}9535$ 95,35%

§3. ĐIỀU CHỈNH VÀ TỐI ƯU HÓA TRÊN SƠ ĐỒ MẠNG

Khi đã tính toán xong các thông số cho sơ đồ mạng ta được một mạng phục vụ cho kế hoạch thi công ban đầu. Tiếp theo, ta phải xem mạng đó có phù hợp với thời gian đã qui định hay không. Nếu không phù hợp với thời gian quy định trước thì phải tiến hành điều chỉnh cho phù hợp về mặt thời gian rồi tiến hành tính toán lại các nguồn lực cung cấp cho việc thực hiện dự án .

Vấn đề đặt ra là cần điều chỉnh mạng như thế nào để đáp ứng được nhu cầu về mặt thời gian với chi phí thấp nhất. Để đạt được mục đích này ta sử dụng đường găng và thực hiện theo 4 bước sau :

Bước 1 Lập sơ đồ PERT, tìm đường găng và các công việc nằm trên đường găng.

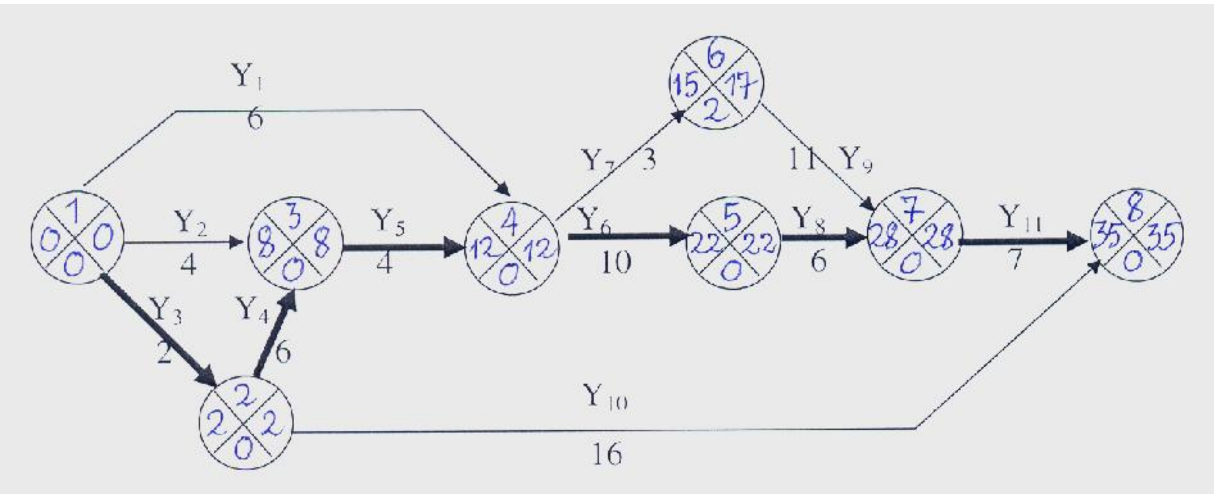
Bước 2 Tính chí phí cho việc rút ngắn thời gian của từng công việc theo từng đơn vị thời gian (giờ, ngày, tuần, tháng, ...- chỉ cần tính cho công việc găng)

Bước 3 Chọn công việc trên đường găng có chi phí nhỏ nhất theo từng đơn vị thời gian và rút ngắn 1 đơn vị. Kiểm tra và tính toán để xác định lại đường găng rồi quay về bước 2. *Chúng ta cứ làm như vậy cho đến khi đạt mục tiêu.*

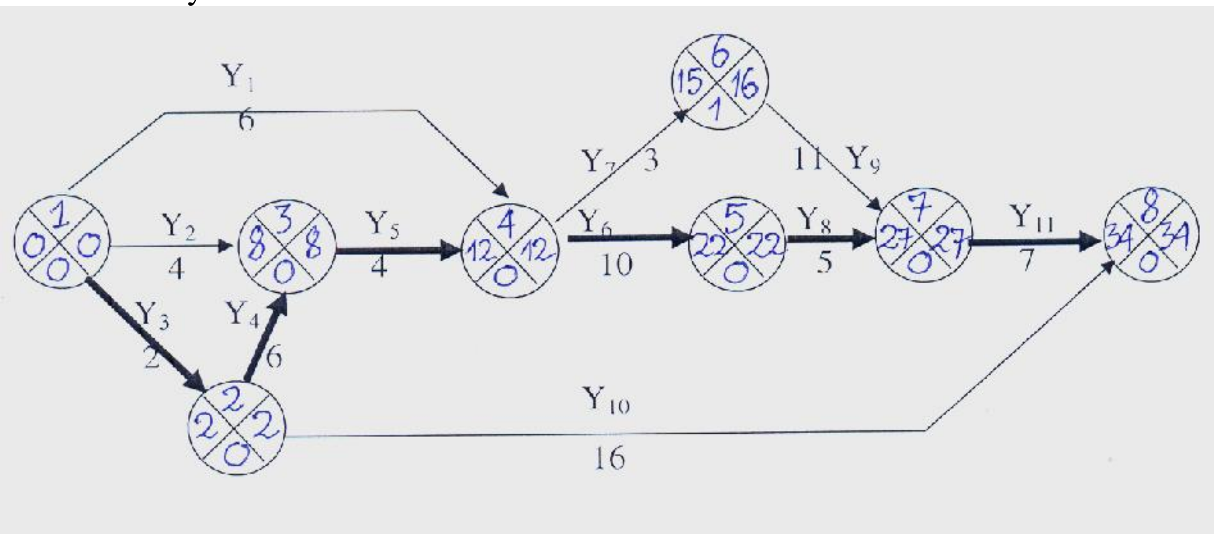
Ví dụ 6 Cần rút ngắn thời gian trung bình hoàn thành dự án trong ví dụ 5 không quá 34 ngày. Giả sử chi phí cho việc rút ngắn thời gian hoàn thành từng công việc găng được cho trong bảng sau (triệu đồng/ngày).

Công việc	Chi phí ngày thứ nhất (triệu đồng/ngày)	Chi phí ngày thứ hai (triệu đồng/ngày)
Y_3	6	7
Y_4	3	4
Y_5	4	5
Y_6	6	8
Y_8	4	5
Y_{11}	5	7

Công việc trêng đường găng có chi phí nhỏ nhất là Y_4 (3 triệu đồng/ ngày). Ta rút ngắn Y_4 xuống còn 7 ngày (rút 1 ngày). Tính lại tất cả các chỉ tiêu trên đỉnh ta được sơ đồ PERT sau đây.



Tiếp theo, công việc trên đường găng có chi phí nhỏ nhất là Y_4, Y_5, Y_8 (4 triệu đồng/ ngày). Ta chọn Y_8 để rút ngắn 1 ngày xuống còn 5 ngày(có thể rút ngày thứ nhất của Y_5 hoặc ngày thứ hai của Y_4). Tính lại tất cả các chỉ tiêu trên đỉnh ta được sơ đồ PERT sau đây.



♦ Ngoài phương pháp này còn có phương pháp sử dụng sử dụng qui hoạch tuyến tính.

Bài tập

Bài 5. 1 Một công trình xây dựng bao gồm các công việc sau đây. Yêu cầu xây dựng sơ đồ mạng , tìm các công việc găng và thời gian dự trữ các loại của công việc.

Công việc	Thời gian để hòan thành (tháng)	Trình tự tiến hành
A	3	Bắt đầu ngay
B	4	Bắt đầu ngay
C	3	Bắt đầu ngay
D	4	Sau A
E	2	Sau A
F	1	Sau A
G	4	Sau B và D
H	2	Sau C và E
I	4	Sau B, C , D ,E ,F

Bài 5. 2 Qui trình sản xuất một loại sản phẩm A bao gồm các công việc sau đây . Yêu cầu xây dựng sơ đồ mạng , tìm các công việc găng và thời gian dự trữ các loại của công việc.

Công việc	Thời gian để hòan thành (giờ)	Trình tự tiến hành
Y_1	3	Bắt đầu ngay
Y_2	5	Bắt đầu ngay
Y_3	7	Bắt đầu ngay
Y_4	9	Sau Y_1
Y_5	6	Sau Y_1
Y_6	12	Sau Y_3
Y_7	11	Sau Y_3
Y_8	8	Sau Y_2, Y_4, Y_5, Y_6
Y_9	4	Sau Y_2, Y_5, Y_6
Y_{10}	5	Sau Y_7

Bài 5. 3 Qui trình công nghệ sản xuất một loại sản phẩm gồm các công việc sau đây . Yêu cầu xây dựng sơ đồ mạng , tìm các công việc găng và thời gian dự trữ các loại của công việc .

Công việc	Thời gian để hòan thành (giờ)	Trình tự tiến hành
Y_1	2	Bắt đầu ngay
Y_2	3	Bắt đầu ngay
Y_3	4	Bắt đầu ngay
Y_4	3	Sau Y_1
Y_5	4	Sau Y_1
Y_6	4	Sau Y_2, Y_5
Y_7	3	Sau Y_2, Y_3, Y_5
Y_8	4	Sau Y_2, Y_4, Y_5
Y_9	6	Sau Y_2, Y_4, Y_5
Y_{10}	5	Sau Y_6, Y_7, Y_8
Y_{11}	7	Sau Y_2, Y_3, Y_5

Bài 5.4 Dựng sơ đồ mạng. Tìm đường găng của quy trình công nghệ

Công việc	Thời gian để hoàn thành (tuần)	Trình tự tiến hành
Y_1	3	Bắt đầu ngay
Y_2	4	Bắt đầu ngay
Y_3	3	Bắt đầu ngay
Y_4	5	Sau Y_1
Y_5	4	Sau Y_1
Y_6	5	Sau Y_3
Y_7	6	Sau Y_2, Y_4
Y_8	8	Sau Y_2, Y_4, Y_5
Y_9	5	Sau Y_7
Y_{10}	4	Sau Y_2, Y_4, Y_6

Bài 5. 5 Bảng sau đây cho biết các công việc phải làm khi lắp đặt hệ thống điện cho một khu nhà ở mới. Trong đó :

a- là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách lạc quan.

m -là thời gian ước tính hoàn thành công việc trong điều kiện bình thường

b- Thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách bi quan. (xảy ra trong hình huống xấu)

Công việc	a (ngày)	m (ngày)	b (ngày)	Trình tự tiến hành
U_1	3	6	8	Bắt đầu ngay
U_2	2	4	6	Bắt đầu ngay
U_3	1	2	3	Bắt đầu ngay
U_4	6	7	8	Sau U_3
U_5	2	4	6	Sau U_2 và U_4
U_6	6	10	14	Sau U_1 và U_5
U_7	1	2	4	Sau U_1 và U_5
U_8	3	6	9	Sau U_6
U_9	10	11	12	Sau U_7
U_{10}	14	16	20	Sau U_3
U_{11}	2	8	10	Sau U_8và U_9

a) Hãy tính kỳ vọng và phương sai cho các đại lượng ngẫu nhiên biểu thị thời gian hoàn thành công việc.

b) Lập sơ đồ PERT và xác định đường găng .

c) Tính xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 40 ngày.

Bài 5. 6 Một công ty cần thực hiện một dự án gồm các công việc với các yêu cầu đặt ra cho trong bảng sau đây. Trong đó, a là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách lạc quan, m là thời gian ước tính hoàn thành công việc trong điều kiện bình thường, b là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách bi quan.

Công việc	Thời gian cần (tuần)			Thứ tự tiến hành
	a	m	b	
y_1	2	2,5	6	Bắt đầu ngay
y_2	3	3,5	7	Bắt đầu ngay
y_3	1,5	2,5	6,5	Bắt đầu ngay
y_4	6	6,5	10	Sau y_1 hoàn thành
y_5	4	6	8	Sau y_2, y_3, y_4 hoàn thành
y_6	6	7,5	12	Sau y_1 hoàn thành
y_7	2,5	3,5	7,5	Sau y_2, y_3, y_4 hoàn thành
y_8	1,5	2	2,5	Sau y_3 hoàn thành
y_9	3	5,25	6	Sau y_3 hoàn thành
y_{10}	3	3,5	7	Sau y_5, y_6, y_7, y_8 hoàn thành
y_{11}	6	6,5	10	Sau y_5, y_6 hoàn thành
y_{12}	3	5,25	6	Sau y_2, y_4, y_9 hoàn thành

a) Hãy tính kỳ vọng và phương sai cho các đại lượng ngẫu nhiên biểu thị thời gian hoàn thành công việc. Lập sơ đồ PERT, xác định đường găng, ước tính thời gian trung bình để hoàn thành dự án.

b) Dựng sơ đồ PERT ngang với điều kiện công ty không thể thực hiện công việc y_8 và y_9 cùng một thời điểm.

c) Tính xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 25 tuần.

d) Giả sử chi phí để rút ngắn thời gian hoàn thành các công việc được cho trong bảng sau đây (triệu đồng/tuần)

Công việc	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
Chi phí	15	12	30	18	15	20	14	12	20	25	18	20

Hãy rút ngắn thời gian trung bình hoàn thành dự án còn 16 tuần với chi phí thấp nhất.

Bài 5.7 Một công ty cần thực hiện một dự án gồm các công việc với các yêu cầu đặt ra cho trong bảng sau đây. Trong đó, a là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách lạc quan, m là thời gian ước tính hoàn thành công việc trong điều kiện bình thường, b là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách bi quan.

Công việc	Thời gian cần (tuần)			Thứ tự tiến hành
	a	m	b	
y_1	2	3,5	8	Bắt đầu ngay
y_2	3	3,5	7	Bắt đầu ngay
y_3	1	2,5	7	Bắt đầu ngay
y_4	6	6,5	10	Sau y_1 hoàn thành
y_5	4	6	8	Sau y_2, y_3, y_4 hoàn thành
y_6	6	7,5	12	Sau y_1 hoàn thành
y_7	2,5	3,5	7,5	Sau y_2, y_3, y_4 hoàn thành
y_8	1,5	2	2,5	Sau y_3 hoàn thành
y_9	3	5,25	6	Sau y_3 hoàn thành
y_{10}	3	3,5	7	Sau y_5, y_6, y_7, y_8 hoàn thành
y_{11}	5	6,5	9	Sau y_5, y_6 hoàn thành
y_{12}	3,5	5,25	5,5	Sau y_2, y_4, y_9 hoàn thành
y_{13}	4	5	6	Sau y_5, y_6 hoàn thành
y_{14}	5	6	7	Sau y_{10}, y_{11}, y_{12} hoàn thành

a) Hãy tính kỳ vọng và phương sai cho các đại lượng ngẫu nhiên biểu thị thời gian hoàn thành công việc. Lập sơ đồ PERT, xác định đường găng, ước tính thời gian trung bình để hoàn thành dự án.

b) Dựng sơ đồ PERT ngang (theo chiều từ trái sang phải và từ trên xuống dưới) với điều kiện công ty không thể thực hiện 5 công việc cùng một thời điểm.

c) Tính xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 30 tuần.

d) Giả sử chi phí để rút ngắn thời gian hoàn thành các công việc được cho trong bảng sau đây (triệu đồng/tuần)

Công việc	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}
Chi phí	10	12	30	18	15	20	14	12	20	25	18	20	16	25

Hãy rút ngắn thời gian trung bình hoàn thành dự án còn 19 tuần với chi phí thấp nhất.

Bài 5.8 Các công việc của một quy trình sản xuất bộ khung kho chứa hàng băng thép và các số liệu liên quan cho ở bảng sau :

Công việc	Thời gian thành để hoàn (tuần)		Chi phí (triệuđồng)		Trình tự tiến hành
	Bình thường	Rút ngắn còn	Bình thường	Khi rút ngắn	
Y_1	3	2	10	16	Bắt đầu ngay
Y_2	2	1	20	27	Bắt đầu ngay
Y_3	2	1	3	6	Bắt đầu ngay
Y_4	7	3	13	16	Sau Y_1
Y_5	6	3	8,5	10	Sau Y_2
Y_6	2	1	40	50	Sau Y_3
Y_7	4	2	15	20	Sau Y_4, Y_5

a) Lập sơ đồ PERT với thời gian hoàn thành các công việc ở mức bình thường và xác định đường găng.
b) Dùng phương pháp "*sử dụng đường găng*" để rút ngắn thời gian hoàn thành toàn bộ quy trình xuống còn 10 tuần.

Bài 5.9 Một công ty cần thực hiện một dự án xây dựng hệ thống nhà xưởng cho sản xuất bao gồm các công việc với các yêu cầu đặt ra cho trong bảng sau đây. Trong đó, a là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách lạc quan, m là thời gian ước tính hoàn thành công việc trong điều kiện bình thường, b là thời gian ước tính hoàn thành công việc một cách bi quan.

Công việc	Thời gian cần (tuần)			Thứ tự tiến hành
	a	m	b	
y_1	1,5	2,5	4,5	Bắt đầu ngay
y_2	1,5	2,5	3,5	Bắt đầu ngay
y_3	1	2,5	7	Bắt đầu ngay
y_4	6	6,5	10	Sau y_2 hoàn thành
y_5	4	6	8	Sau y_1, y_3, y_4 hoàn thành
y_6	6	7,5	10	Sau y_2 hoàn thành
y_7	2,5	3,5	5,5	Sau y_1, y_3, y_4 hoàn thành
y_8	1,5	2	2,5	Sau y_3 hoàn thành
y_9	3	5,25	6	Sau y_3 hoàn thành
y_{10}	3	3,5	7	Sau y_5, y_6, y_7, y_8 hoàn thành
y_{11}	6	6,5	10	Sau y_5, y_6 hoàn thành
y_{12}	3,5	5,25	5,5	Sau y_1, y_4, y_9 hoàn thành
y_{13}	4	5	6	Sau y_5, y_6 hoàn thành
y_{14}	5	6	7	Sau y_{10}, y_{11}, y_{12} hoàn thành
y_{15}	0,5	1,5	2,5	Sau y_1, y_4, y_9 hoàn thành

a) Hãy tính kỳ vọng và phương sai cho các đại lượng ngẫu nhiên biểu thị thời gian hoàn thành công việc. Khi tính kỳ vọng làm tròn số phần thập phân như sau:

Khoảng	(0; 0,2]	(0,2; 0,4]	(0,4; 0,6]	(0,6,0,8]	(0,8; 1)
Làm tròn thành	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Lập sơ đồ PERT, xác định đường găng, ước tính thời gian trung bình để hoàn thành dự án.Tính xác suất để toàn bộ dự án được hoàn thành với thời gian không quá 33 tuần.

b) Lập bảng chỉ tiêu thời gian cho các công việc và dựng sơ đồ PERT ngang (theo chiều từ trái sang phải và từ trên xuống dưới) với điều kiện nguồn nhân lực của công ty không thể thực hiện 4 công việc cùng một thời điểm.

c) Giả sử chi phí để rút ngắn thời gian hoàn thành các công việc được cho trong bảng sau đây (triệu đồng/tuần)

C. việc	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
Chi phí	15	12	30	18	15	20	14	12	20	25	18	20	16	10	20

Hãy rút ngắn thời gian trung bình hoàn thành dự án không quá 20 tuần với chi phí thấp nhất và tính chi phí tăng thêm đó. Lập bảng chỉ tiêu thời gian cho các công việc và dựng sơ đồ PERT ngang đối với kế hoạch sau khi rút ngắn thời gian trung bình hoàn thành dự án không quá 24 tuần.

d) Dự án đang thực hiện theo kế hoạch đã lập ở (c) thì vào đầu tuần 10 có một sự cố xảy ra làm toàn bộ công việc của công ty phải ngưng thực hiện 01 tuần. Hãy điều chỉnh kế hoạch sao cho thời gian trung bình hoàn thành dự án không quá 24 tuần với chi phí thấp nhất.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ môn Toán Kinh tế Trường ĐH Kinh tế Tp Hồ Chí Minh, *Qui hoạch tuyến tính*, NXB Thống kê 2000.

[2] Bùi Minh Trí , *Qui hoạch toán học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội1999.

[3] Bùi Thế Tâm & Trần Vũ Thiệu, *Các phương pháp tối ưu hóa*, NXB Giao thông vậi tải, Hà Nội 1998.

[4] Phan Quốc Khánh, *Vận trù học* , NXB Giáo dục, 2002.

[5] Đặng Hấn, *Qui hoạch tuyến tính*, Trường ĐH Kinh tế Tp Hồ Chí Minh 1995.

[6] Hoàng Ngọc Nhậm, *Kinh tế lượng và mô hình toán kinh tế*, Trường ĐH Kinh tế Tp Hồ Chí Minh 1999.

[7] Ngô Văn Thứ , *Mô hình toán ứng dụng*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội2000.

Phân phối chuẩn tắc: X ~ N(0, 1)

Tích phân Laplace: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

Ví dụ: $\phi(0,40) = 0,1554$ $\qquad$ $\phi(1,65) = 0,4505$

$\phi(1,96) = 0,4750$ $\qquad$ $\phi(-2,58) = -\phi(2,58) = -0,4951$

(tiếp theo)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Lưu ý: Nếu $x > 4,09$ thì lấy $\phi(x) = 0,5$

Mục lục